6 - Oscilações

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

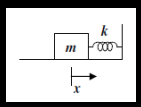
Pequenas oscilações

Aplicações em Acústica, espectros moleculares, vibrações em mecanismos, circuitos elétricos acoplados, etc.

Se os desvios do equilíbrio estável são pequenas, pode-se descrever por sistemas de osciladores harmônicos acoplados.

Revisão de oscilador harmônico

Massa *m* sobre superfície sem atrito presa a uma mola de constante *k* fixa numa parede.



A mola, quando deformada, reage com uma força *F* dada pela lei de Hooke

$$F = -kx$$

Revisão de oscilador harmônico

Da 2ª Lei de Newton,

$$F = ma$$

e, assim, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0$ com $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$

e solução $x(t) = \alpha\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \beta\cos(\omega_0 t)$

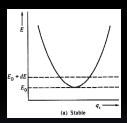
ou $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta)$ com $\alpha = A\cos\delta$, $\beta = A\,\mathrm{sen}\,\delta$

Equilíbrio

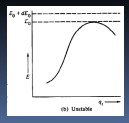
No equilíbrio, $Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0.$

Pode ser

- Estável



- Instável



Próximo ao equilíbrio

Fazendo $q_i = q_{0i} + \eta_i,$

Expandindo o potencial em série de Taylor,

$$V(q_1,\ldots,q_n) = V(q_{01},\ldots,q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \cdots,$$ (c/ Σ_{ij})

Mas $V(q_{01},\ldots,q_{0n}) = 0$ e $Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0.$

Então $V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} V_{ij}\eta_i \eta_j,$

Próximo ao equilíbrio

Para a energia cinética,

$$T = \tfrac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \tfrac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j,$$

com

$$m_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \ldots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k + \cdots,$$

Como T é quadrática nas velocidades,

$$T = \tfrac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad \text{com} \quad T_{ij} = m_{ij}(q_{01}, \ldots, q_{0n})$$

e a Lagrangeana fica

$$L = \tfrac{1}{2}(T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j). \quad \text{com as EM} \quad T_{ij} \ddot{\eta}_{ij} + V_{ij} \eta_j = 0,$$

Próximo ao equilíbrio

As EM devem ter soluções da forma

$$\eta_i = C a_i e^{i\omega t}$$

que, substituídas nas EM, resultam

$$(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$$ (**equações de autovalores**),

as quais só podem ter solução NT se

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \cdots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0,$$

chamada **equação característica**.

Próximo ao equilíbrio

Reescrevendo as equações de autovalores,

$$\mathbf{Va} = \lambda \mathbf{Ta}$$

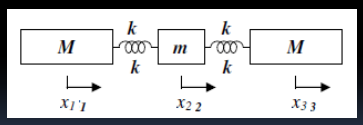
onde $\mathbf{a}$ é uma matriz coluna de **autovetores** e λ são os correspondentes **autovalores** (reais).

Demonstra-se que $\mathbf{a}$ é tal que diagonaliza $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$.

$$|\mathbf{V} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{1}| = 0$$

Oscilador harmônico composto

Duas massas iguais M e uma massa m entre elas, ligadas por molas ideais com a mesma constante k.



Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) - \dfrac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \dfrac{d^2 x_3}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

para as quais, procuramos soluções em que as três massas oscilam com a mesma frequência angular, isto é, os **modos normais de vibração**

Oscilador harmônico composto

Substituindo as soluções $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$, obtemos a equação de autovalores

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega_0^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega_0^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oscilador harmônico composto

A equação característica fica, então,

$$\left(\omega_0^2-\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2-2\frac{k}{m}\right)\left(\omega_0^2-\frac{k}{M}\right)-2\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{m}\right)\left(\omega_0^2-\frac{k}{M}\right)=0$$

que equivale a $\left(\omega_0^2-\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2-2\frac{k}{m}-\frac{k}{M}\right)\omega_0^2=0$

com raízes

$$\begin{cases}\omega_0^2=0\\ \omega_0^2=\dfrac{k}{M}\\ \omega_0^2=\dfrac{k}{M}+2\dfrac{k}{m}\end{cases},$$

Oscilador harmônico composto

Para o primeiro autovalor $\omega_0^2=0$,

por diagonalização,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-k/M & k/M & 0 & 0\\ 0 & -k/m & k/m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \begin{cases}-\dfrac{k}{M}x_1+\dfrac{k}{M}x_2=0\\ -\dfrac{k}{m}x_2+\dfrac{k}{m}x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_3\end{cases}$$

que corresponde ao sistema em repouso, sem deformação das molas nem oscilação.

Oscilador harmônico composto

Para o autovalor $\omega_0^2=\frac{k}{M}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}k/m & k/M-2k/m & k/m & 0\\ 0 & k/M & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases}\dfrac{k}{m}x_1+\left(\dfrac{k}{M}-\dfrac{2k}{m}\right)x_2+\dfrac{k}{m}x_3=0\\ \dfrac{k}{M}x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{k}{m}x_1+\dfrac{k}{m}x_3=0\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=-x_1\\ x_2=0\end{cases}$$

em que as massas M oscilam em sentidos opostos e a massa m fica em repouso

Oscilador harmônico composto

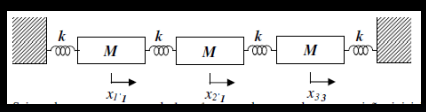
Para o autovalor $\omega_0^2=\frac{k}{M}+2\frac{k}{m}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2k/m & k/M & 0 & 0\\ k/m & k/M & k/m & 0\\ 0 & k/M & 2k/m & 0\end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \begin{cases}\dfrac{2k}{m}x_1+\dfrac{k}{M}x_2=0\\ -\dfrac{k}{M}x_2+\dfrac{2k}{m}x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-\dfrac{2M}{m}x_1\\ x_3=x_1\end{cases}$$

em que as massas M oscilam com o mesmo sentido e amplitude e a massa m oscila em sentido contrário com amplitude 2 M/m da das outras.

2º Oscilador harmônico composto

Três massas iguais M, ligadas entre si e a paredes por molas iguais k.



2º Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=-\dfrac{k}{M}(x_1-x_2)-\dfrac{k}{M}x_1\\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}=-\dfrac{k}{M}(x_2-x_1)-\dfrac{k}{M}(x_2-x_3)\\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2}=-\dfrac{k}{M}(x_3-x_2)-\dfrac{k}{M}x_3\end{cases}$$

para as quais procuramos os **modos normais de vibração**

2º Oscilador harmônico composto

Substituindo as soluções $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$,

obtemos a equação de autovalores

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - 2k/M & k/M & 0 \\ k/M & \omega_0^2 - 2k/M & k/M \\ 0 & k/M & \omega_0^2 - 2k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2º Oscilador harmônico composto

A equação característica fica, então,

$$\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right) - 2\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right) = 0,$$

que equivale a

$$\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - (2+\sqrt{2})\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - (2-\sqrt{2})\frac{k}{M}\right) = 0,$$

com raízes

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 2\dfrac{k}{M} \\ \omega_0^2 = (2+\sqrt{2})\dfrac{k}{M} \\ \omega_0^2 = (2-\sqrt{2})\dfrac{k}{M} \end{cases}$$

2º Oscilador harmônico composto

Para o primeiro autovalor $\omega_0^2 = 2\frac{k}{M}$,

por diagonalização,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k/M & 0 & k/M & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_3 = 0 \\ \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

que corresponde à massa central em repouso e as outras duas com a mesma amplitude, mas em sentidos contrários.

2º Oscilador harmônico composto

Para o autovalor $\omega_0^2 = (2+\sqrt{2})\frac{k}{M}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}k/2M & k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \\ \dfrac{k}{\sqrt{2}M}x_2 + \dfrac{k}{M}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}x_1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

em que as massas externas oscilam com o mesmo sentido e amplitude e a massa central oscila em sentido contrário com amplitude $\sqrt{2}$ da das outras.

2º Oscilador harmônico composto

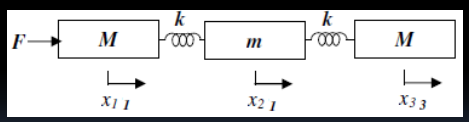
Para o autovalor $\omega_0^2 = (2-\sqrt{2})\frac{k}{M}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}k/2M & k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\dfrac{k}{\sqrt{2}M}x_2 + \dfrac{k}{M}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}x_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

em que as três massas oscilam com o mesmo sentido, as externas com a mesma amplitude e a massa central com amplitude $\sqrt{2}$ da das outras.

3º Oscilador harmônico composto

Duas massas iguais M e uma massa m entre elas, ligadas por molas iguais k, sujeitas a uma força periódica F atuando na primeira massa.



$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

3º Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_1 - x_2) + \dfrac{F(t)}{M} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) - \dfrac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

para as quais procuramos os **modos normais de vibração.**

3º Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_1 - x_2) + \dfrac{F(t)}{M} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) - \dfrac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

para as quais procuramos os **modos normais de vibração**.

3º Oscilador harmônico composto

Substituindo as soluções $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$,

obtemos a equação de autovalores

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - k/M\right)A_1 + k/M\, A_2 = -F_0/M \\ k/m\, A_1 + \left(\omega^2 - 2k/m\right)A_2 + k/m\, A_3 = 0 \\ k/M\, A_2 + \left(\omega^2 - k/M\right)A_3 = 0 \end{cases}$$

3º Oscilador harmônico composto

Com solução

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{\omega^4 - (k/M + 2k/m)\omega^2 + (k/M)(k/m)}{\omega^2(\omega^2 - k/M)(\omega^2 - k/M - 2k/m)}\dfrac{F_0}{M} \\ A_2 = \dfrac{(k/M)(k/m)}{\omega^2(\omega^2 - k/M - 2k/m)}\dfrac{F_0}{k} \\ A_3 = -\dfrac{(k/M)(k/m)}{\omega^2(\omega^2 - k/M)(\omega^2 - k/M - 2k/m)}\dfrac{F_0}{M} \end{cases}$$

3º Oscilador harmônico composto

Comparando com o 1º exemplo, com autovalores $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M}$ e $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M} + 2\dfrac{k}{m}$,

vê-se que, caso a frequência da força tenda a um desses valores, as amplitudes de oscilação crescerão ilimitadamente!

Este é o fenômeno da **ressonância**.

É a base dos fornos de micro-ondas e causa de acidentes, tais como a *Tacoma Narrow's Bridge*.

Bibliografia

dos SANTOS, Renato P. Oscilador Harmónico Composto. In: A. Carreira; G. Pinto (Eds.), **Cálculo Matricial**. v. 3, p. 237–251. Lisboa: Instituto Piaget, 1999. Disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/files/capitulo-oscilador_harmonico_composto.pdf>.