

5 - Oscilações

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

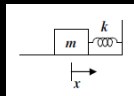
Pequenas oscilações

Aplicações em Acústica, espectros moleculares, vibrações em mecanismos, circuitos elétricos acoplados, etc.

Se os desvios do equilíbrio estável são pequenas, pode-se descrever por sistemas de osciladores harmônicos acoplados.

Revisão de oscilador harmônico

Massa m sobre superfície sem atrito presa a uma mola de constante k fixa numa parede.



A mola, quando deformada, reage com uma força F dada pela lei de Hooke

$$F = -kx$$

Revisão de oscilador harmônico

Da 2ª Lei de Newton,

$$F = ma$$

e, assim,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ com $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$

e solução

$$x(t) = \alpha \sin(\omega_0 t) + \beta \cos(\omega_0 t)$$

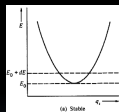
ou $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta)$ com $\alpha = A \cos \delta$
 $\beta = A \sin \delta$

Equilíbrio

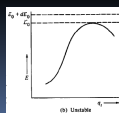
No equilíbrio, $Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0$.

Pode ser

- Estável



- Instável



Próximo ao equilíbrio

Fazendo

$$q_i = q_{0i} + \eta_i,$$

Expandindo o potencial em série de Taylor,

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \dots, \quad (c/\sum_{ij})$$

Mas $V(q_{01}, \dots, q_{0n}) = 0$ e $Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0$.

Então $V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$.

Próximo ao equilíbrio

Para a energia cinética,

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

com

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots$$

Como T é quadrática nas velocidades,

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad \text{com} \quad T_{ij} = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n})$$

e a Lagrangeana fica

$$L = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j), \quad \text{com as EM} \quad T_{ij} \ddot{\eta}_i + V_{ij} \eta_j = 0.$$

Próximo ao equilíbrio

As EM devem ter soluções da forma

$$\eta_i = C a_i e^{i\omega t}$$

que, substituídas nas EM, resultam

$$(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad (\text{equações de autovalores}),$$

as quais só podem ter solução NT se

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0.$$

chamada equação característica.

Próximo ao equilíbrio

Reescrevendo as equações de autovalores,

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \lambda \mathbf{T}\mathbf{a}$$

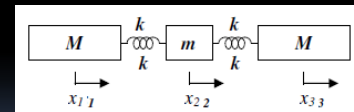
onde \mathbf{a} é uma matriz coluna de **autovetores** e λ são os correspondentes **autovalores** (reais).

Demonstra-se que \mathbf{a} é tal que diagonaliza \mathbf{T} e \mathbf{V} .

$$|\mathbf{V} - \lambda \mathbf{1}| = 0$$

Oscilador harmônico composto

Duas massas iguais M e uma massa m entre elas, ligadas por molas ideais com a mesma constante k .



Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{M} (x_1 - x_2) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m} (x_2 - x_1) - \frac{k}{m} (x_2 - x_3) \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{k}{M} (x_3 - x_2) \end{cases}$$

para as quais, procuramos soluções em que as três massas oscilam com a mesma frequência angular, isto é, os **modos normais de vibração**

Oscilador harmônico composto

Substituindo as soluções $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$,

obtemos a equação de autovalores

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega_0^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega_0^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oscilador harmônico composto

A equação característica fica, então,

$$\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{m}\right)\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right) - 2\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{m}\right)\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right) = 0$$

que equivale a $\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{m} - \frac{k}{M}\right)\omega_0^2 = 0$

com raízes

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 0 \\ \omega_0^2 = \frac{k}{M} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{M} + 2\frac{k}{m} \end{cases}$$

Oscilador harmônico composto

Para o primeiro autovalor $\omega_0^2 = 0$,

por diagonalização,

$$\begin{bmatrix} -k/M & k/M & 0 \\ 0 & -k/m & k/m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} -\frac{k}{M}x_1 + \frac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

que corresponde ao sistema em repouso, sem deformação das molas nem oscilação.

Oscilador harmônico composto

Para o autovalor $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$,

$$\begin{bmatrix} k/m & k/M & -2k/m \\ 0 & k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{M}x_2 - 2\frac{k}{m}x_3 = 0 \\ \frac{k}{M}x_2 = 0 \end{cases}$$

OU

$$\begin{cases} \frac{k}{m}x_1 + \left(\frac{k}{M} - \frac{2k}{m}\right)x_2 + \frac{k}{m}x_3 = 0 \\ \frac{k}{M}x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

em que as massas M oscilam em sentidos opostos e a massa m fica em repouso

Oscilador harmônico composto

Para o autovalor $\omega_0^2 = \frac{k}{M} + 2\frac{k}{m}$

$$\begin{bmatrix} 2k/m & k/M & 0 \\ k/m & k/M & k/m \\ 0 & k/M & 2k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\frac{k}{M}x_2 + \frac{2k}{m}x_3 = 0 \end{cases}$$

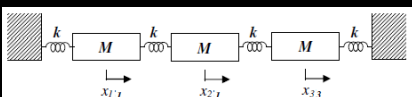
OU

$$\begin{cases} \frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\frac{k}{M}x_2 + \frac{2k}{m}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{2M}{m}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

em que as massas M oscilam com o mesmo sentido e amplitude e a massa m oscila em sentido contrário com amplitude $2M/m$ das outras.

2º Oscilador harmônico composto

Três massas iguais M , ligadas entre si e à paredes por molas iguais k .



2º Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) - \frac{k}{M}x_1 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_2 - x_1) - \frac{k}{M}(x_2 - x_3) \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2) - \frac{k}{M}x_3 \end{cases}$$

para as quais procuramos os modos normais de vibração

2º Oscilador harmônico composto

Substituindo as soluções $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$,
obtemos a equação de autovalores

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - 2k/M & k/M & 0 \\ k/M & \omega_0^2 - 2k/M & k/M \\ 0 & k/M & \omega_0^2 - 2k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2º Oscilador harmônico composto

A equação característica fica, então,

$$\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right) - 2\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right) = 0,$$

que equivale a

$$\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - (2+\sqrt{2})\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - (2-\sqrt{2})\frac{k}{M}\right) = 0$$

com raízes

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 2\frac{k}{M} \\ \omega_0^2 = (2+\sqrt{2})\frac{k}{M} \\ \omega_0^2 = (2-\sqrt{2})\frac{k}{M} \end{cases}$$

2º Oscilador harmônico composto

Para o primeiro autovalor $\omega_0^2 = 2\frac{k}{M}$,
por diagonalização,

$$\begin{bmatrix} k/M & 0 & k/M \\ 0 & k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ OU } \begin{cases} \frac{k}{M}x_1 + \frac{k}{M}x_3 = 0 \\ \frac{k}{M}x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

que corresponde à massa central em repouso e as outras duas com a mesma amplitude, mas em sentidos contrários.

2º Oscilador harmônico composto

Para o autovalor $\omega_0^2 = (2+\sqrt{2})\frac{k}{M}$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}k/M & k/M & 0 \\ 0 & \sqrt{2}k/2M & k/M \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ OU } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}k}{M}x_1 + \frac{k}{M}x_2 = 0 \\ \frac{k}{\sqrt{2}M}x_2 + \frac{k}{M}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}x_1 \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

em que as massas externas oscilam com o mesmo sentido e amplitude e a massa central oscila em sentido contrário com amplitude $\sqrt{2}$ da das outras.

2º Oscilador harmônico composto

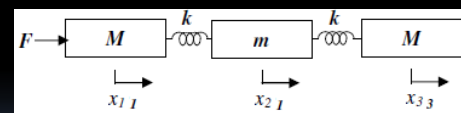
Para o autovalor $\omega_0^2 = (2-\sqrt{2})\frac{k}{M}$,

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}k/M & k/M & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}k/2M & k/M \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ OU } \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}k}{M}x_1 + \frac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{2}M}x_2 + \frac{k}{M}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}x_1 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

em que as três massas oscilam com o mesmo sentido, as externas com a mesma amplitude e a massa central com amplitude $\sqrt{2}$ da das outras.

3º Oscilador harmônico composto

Duas massas iguais M e uma massa m entre elas, ligadas por molas iguais k , sujeitas a uma força periódica F atuando na primeira massa.



$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

3º Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) + \frac{F(t)}{M} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

para as quais procuramos os **modos normais de vibração**.

3º Oscilador harmônico composto

As equações de movimento são

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) + \frac{F(t)}{M} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

para as quais procuramos os **modos normais de vibração**.

3º Oscilador harmônico composto

Substituindo as soluções $x_i(t) = A_i \cos(\omega_f t)$,
obtemos a equação de autovalores

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{OU}$$

$$\begin{cases} (\omega^2 - k/M)A_1 + k/M A_2 = -F_0/M \\ k/m A_1 + (\omega^2 - 2k/m)A_2 + k/m A_3 = 0 \\ k/M A_2 + (\omega^2 - k/M)A_3 = 0 \end{cases}$$

3º Oscilador harmônico composto

Com solução

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{\omega^4 - (k/M + 2k/m)\omega^2 + (k/M)(k/m) F_0}{\omega^2(\omega^2 - k/M)(\omega^2 - k/M - 2k/m) M} \\ A_2 = \frac{(k/M)(k/m) F_0}{\omega^2(\omega^2 - k/M - 2k/m) k} \\ A_3 = -\frac{(k/M)(k/m) F_0}{\omega^2(\omega^2 - k/M)(\omega^2 - k/M - 2k/m) M} \end{cases}$$

3º Oscilador harmônico composto

Comparando com o 1º exemplo, com autovalores $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{M} + \frac{2k}{m}$, vê-se que, caso a frequência da força tenda a um desses valores, as amplitudes de oscilação crescerão ilimitadamente!

Este é o fenômeno da **ressonância**.

É a base dos fornos de micro-ondas e causa de acidentes, tais como a *Tacoma Narrow's Bridge*.

RUMO AO CAOS

Roleta

- sabendo θ_0 e v_0 da bolinha e da roda
- pode ser modelizada matematicamente:
 - qual a 1ª casa
 - qual a 2ª casa,
 - etc., até parar
- mas só se θ_0 e v_0 com precisão infinita!



História

- Teoria das Perturbações: pequenas perturbações \Rightarrow pequenos efeitos
- problema de muitos corpos \rightarrow sistema Solar (Poincaré)
- Teoria das Perturbações não se aplicava

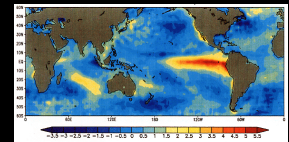
\Rightarrow Sistema Solar é caótico!!!

Caos

- Caos não é desordem!
- Desordem: **in**determinado e **im**previsível
- Ordem: **de**terminado e **pre**visível
- Caos: **de**terminado mas **im**previsível!!!
- Caos: estado intermediário entre desordem e ordem
- Caos: determinista e imprevisível

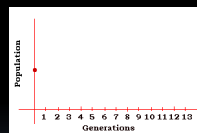
Sistemas reais não-lineares

- Pêndulo caótico
 - Trapézio espacial
 - Pêndulo esférico
- a mancha vermelha de Júpiter
- a corrente do Golfo
- El Niño?



Caos na Natureza

- populações são caóticas
- saúde humana é caótica
- guerras são caóticas
- etc.

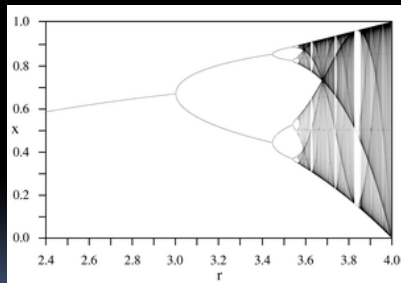


Equação logística

- $x = r * x(1-x)$
- $p/r = 2,7$, p.ex, x tende a um ponto de equilíbrio
- para $r > 3$, oscilações e caos

- 0,02
- 0,0529
- 0,1353
- 0,3159
- 0,5835
- 0,6562
- 0,6092
- 0,6428
- 0,6199
- 0,6362
- 0,6249
- ...
- 0,6296

Bifurcação



© www.fisica-interessante.com 16-mar-2012

37/

88

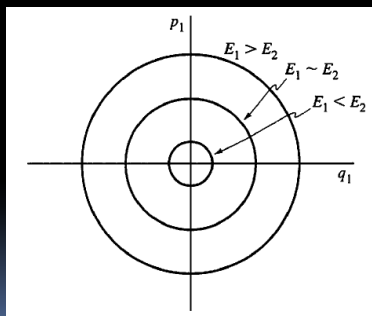
Pêndulo simples

- Transformando em coordenadas generalizadas posição e momento linear,

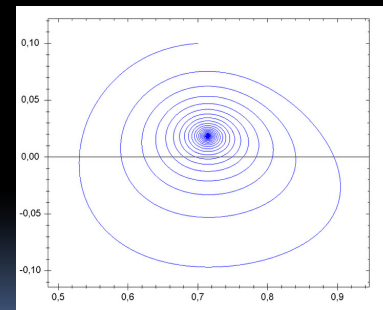
$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2q_2^2.$$

- Equivalente a dois osciladores harmônicos desacoplados com frequências angulares ω_1 e ω_2

Diagrama de fase ($\omega_1 = \omega_2$)



Com pouco atrito

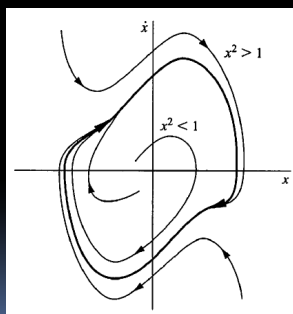


© www.fisica-interessante.com 16-mar-2012

40/

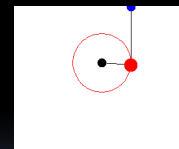
88

Com muito atrito



Pêndulo duplo

- Diagrama em espaço de fase: $p \times x$



© www.fisica-interessante.com 16-mar-2012

42/

88

Pequenas oscilações

$$T = \frac{1}{2}(I_1 + m_2 l_2^2) \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + m_2 l_2 l_3 \dot{\phi}_1 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos \phi_2,$$

$$V = g(m_1 l_1 + m_2 l_3)(1 - \cos \phi_1) + m_2 g l_2 [1 - \cos(\phi_1 + \phi_2)],$$

- Para pequenas oscilações

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-(c_1 + c_4) \pm \sqrt{(c_1 + c_4)^2 - 4(c_1 c_4 - c_2 c_3)}}{2d}$$

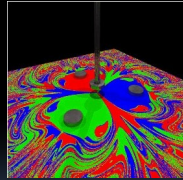
Grandes oscilações

- Alta sensibilidade a condições iniciais
- Separação entre trajetórias cresce exponencialmente com o tempo com
- $\lambda =$ expoente de Lyapunov

$$s(t) \sim s_0 e^{\lambda t}$$

Pêndulo magnético

- ponto azul: pêndulo terminará no ímã 'azul', etc.

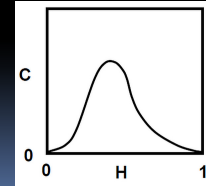


© www.fisica-interessante.com 16-mar-2012

45/88

Caos e complexidade

- Sistemas caóticos são um subconjunto de sistemas complexos
- Complexidade \times entropia (aleatoriedade, imprevisibilidade)



Cálculo da complexidade

- (Crutchfield)

$$C_\mu = - \sum_{\sigma \in S} P(\sigma) \log_2 P(\sigma)$$

Exemplos

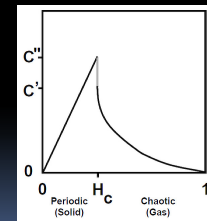
- Cristal: previsível: um único estado que se repete indefinidamente \Rightarrow uma única classe de equivalência $\Rightarrow (P(\Omega) = 1 \Rightarrow \log_2 P(\Omega) = 0 \Rightarrow C_\Omega = 0)$
- Moeda: imprevisível: um estado não dá informações sobre o estado anterior \Rightarrow todos os estados são equivalentes \Rightarrow uma única classe de equivalência $\Rightarrow (P(\Omega) = 1 \Rightarrow \log_2 P(\Omega) = 0 \Rightarrow C_\Omega = 0)$

Exemplos

- Relógio (*tic-tac*): após o estado inicial arbitrário, após um *tic*, vem certamente um *tac* ($P(\text{tic}) = 1/2 \Rightarrow \log_2 P(\text{tic}) = -1 \Rightarrow C_{\text{tic}} = 1$)

Caos e complexidade

- Ponto crítico



Bibliografia

dos SANTOS, Renato P. Oscilador Harmônico Composto. In: A. Carreira; G. Pinto (Eds.), **Cálculo Matricial**. v. 3, p. 237–251. Lisboa: Instituto Piaget, 1999. Disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/files/capitulo-oscilador_harmonico_composto.pdf>.

Bibliografia

- GLEICK, James. *Caos : A Construção de uma nova Ciência*. Campus, 1989.
- SILVEIRA, Fernando L. da. Determinismo, Previsibilidade e Caos. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, v.10, n.2: p.137-147, ago.1993. Disponível em <<http://www.fsc.ufsc.br/cbef/port/10-2/artpdf/a4.pdf>>. Acesso em 18 abr. 2007.

Bibliografia

- LEVIEN, R. B.; TAN, S. M.. Double pendulum: An experiment in chaos. *American Journal of Physics*, v. 61, n. 11, p. 1038-1044, Nov. 1993.
- CRUTCHFIELD, James P. Between order and chaos. *Nature Physics*, v. 8, n. 1, p. 17-24, Dec 2011.