5 - A Dinâmica do corpo rígido

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

Dinâmica do corpo rígido

6 graus de liberdade:

- *3* graus do **centro de massa**: (x, y, z)
- *3* graus de **rotação em torno dele**: (θ, φ, ψ)

Energia cinética

Teorema de Chasles: O deslocamento mais geral possível de um corpo rígido é uma translação seguida (ou precedida) de uma rotação.

A energia cinética fica, então,

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 + T'(\phi, \theta, \psi)$$

Nos casos práticos, o potencial pode, também, ser decomposto dessa forma.

Com isso, também a Lagrangeana é decomponível.

Momento angular

O momento angular total do corpo com relação a um ponto estacionário (centro de massa) é

$$\mathbf{L} = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$$

Como $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m_i\left[\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)\right] \\ &= m_i\left[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\right]\end{aligned}$$

Momento angular

Podemos reescrever isso como

$$L_x = \omega_x m_i(r_i^2 - x_i^2) - \omega_y m_i x_i y_i - \omega_z m_i x_i z_i,$$

e, igualmente para as outras componentes, ou

$$\begin{aligned}L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\end{aligned}$$

com $I_{xx} = m_i(r_i^2 - x_i^2)$, $I_{xy} = -m_i x_i y_i$ etc.

Tensor momento de inércia

Temos, aqui, nosso primeiro exemplo de um tensor, o **tensor momento de inércia**

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

Como vimos, vetores transformam-se como

$$x_i' = a_{ij}x_j \quad .$$

Tensores de posto (*rank*) 2 transformam-se como

$$T_{ij}' = a_{ik}a_{jl}T_{kl}.$$

Tensor momento de inércia

Seus elementos diagonais são chamados de **coeficientes de momento de inércia** e dados por

$$I_{xx} = m_i(r_i^2 - x_i^2),$$

Seus elementos fora da diagonal são chamados **produtos de inércia** e dados por

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i$$

Tensor momento de inércia

No caso de movimentos em 2 dimensões, todas as rotações ocorrem por eixos perpendiculares ao plano. Com isso, o momento de inércia é um **escalar**.

No caso de movimentos em 3 dimensões, sempre é possível **diagonalizar** o tensor momento de inércia de forma que seus 3 autovetores formem um sistema de coordenadas com estes definindo **eixos de simetria do sistema**.

Tensor momento de inércia

Pode-se, também, estender a expressão, para o caso de corpos contínuos, como

$$I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)\, dV$$

Tensor momento de inércia

Por exemplo, para um cubo homogêneo de massa M e lado a, considerando a origem das coordenadas num vértice e arestas ao longo dos eixos x, y e z, seu momento de inércia, fazendo $b = Ma^2$, será

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b & -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b & \frac{2}{3}b & -\frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}b & \frac{2}{3}b \end{pmatrix}$$

Tensor momento de inércia

Em 2 dimensões, a **energia cinética de rotação** pode ser expressa como

$$T_{\text{rotation}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Já para movimentos em 3 dimensões,

$$T_{\text{rotation}} = \tfrac{1}{2} I_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha \omega_\beta,$$

Tensor momento de inércia

Ou

$$T_{\text{rotation}} = \frac{\omega^2}{2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

onde $\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ é um vetor unitário na direção daquela rotação $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$.