

4 - A Dinâmica do corpo rígido

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

Corpo rígido

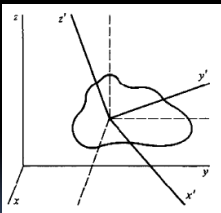
Sistema de partículas sujeitas aos vínculos holonômicos $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$.

Embora um corpo com N partículas possa ter $3N$ graus de liberdade, os vínculos acima reduzem esse número para apenas **6 graus de liberdade**.

Essencialmente, 3 graus do centro de massa e 3 graus de rotação em torno dele.

Coordenadas do corpo rígido

- Podemos definir um sistema de coordenadas (x', y', z') sobre o corpo rígido, relativo ao sistema definido no espaço (x, y, z) .



Coordenadas do corpo rígido

Expressando o mesmo vetor posição tanto num como no outro sistema de coordenadas,

$$\mathbf{r} - xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k'$$

extraímos a relação entre os dois sistemas como

$$\begin{aligned} x' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}') = \cos \theta_{11}x + \cos \theta_{12}y + \cos \theta_{13}z \\ y' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}') = \cos \theta_{21}x + \cos \theta_{22}y + \cos \theta_{23}z \\ z' &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}') = \cos \theta_{31}x + \cos \theta_{32}y + \cos \theta_{33}z \end{aligned}$$

Coordenadas do corpo rígido

Dada a ortonormalidade dos versores de base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

resulta

$$\sum_{l=1}^3 \cos \theta_{lm'} \cos \theta_{lm} = 0 \quad m \neq m' \quad \text{OU} \quad \sum_{l=1}^3 \cos \theta_{lm'} \cos \theta_{lm} = \delta_{m'm}$$

$$\sum_{l=1}^3 \cos^2 \theta_{lm} = 1.$$

com $\delta_{lm} = 1 \quad l = m$
 $\delta_{lm} = 0 \quad l \neq m.$

perfazendo **6** quantidades independentes.

Transformações

Podemos reescrever como uma transformação $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$.

Transformações sucessivas \mathbf{A} e \mathbf{B} combinam-se, resultando numa nova transformação \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B},$$

Transformações são **não-comutativas**

$$\mathbf{B}\mathbf{A} \neq \mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Mas são associativas

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

Transformações

Define-se a **transformação inversa**

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1},$$

Para transformações ortogonais, vale a relação

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}$ é a **transformação adjunta**

Transformações c/ determinante negativo representam **inversões**, não **translações** de corpos rígidos.

Ângulos de Euler

The diagram shows three coordinate systems: the original X, Y, Z system; an intermediate system X'', Y'', Z'' after a rotation about the Z-axis; and the final system X', Y', Z' after a rotation about the X''-axis. The angles of rotation are labeled as alpha, beta, and gamma.

Ângulos de Euler

Usando os 3 ângulos anteriormente definidos, a transformação pode ser expressa por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \end{bmatrix}$$

Os parâmetros de Cayley-Klein

São 4 parâmetros reais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) \\ 2(e_1 e_2 + e_0 e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 \\ 2(e_1 e_3 + e_0 e_2) & 2(e_2 e_3 + e_0 e_1) \\ 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}$$

sujeitos à condição $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$

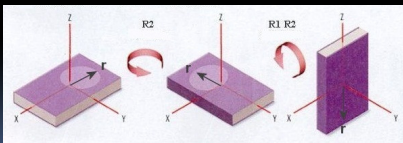
Teorema de Chasles

O deslocamento mais geral possível de um corpo rígido é uma translação seguida (ou precedida) de uma rotação.

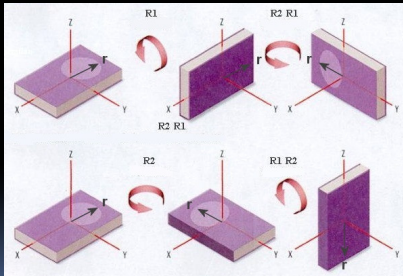
Rotações não são comutativas

The diagram shows a cube in a coordinate system with axes X, Y, Z. It illustrates two different sequences of rotations: R1 followed by R2, and R2 followed by R1. The resulting orientations of the cube are shown to be different, demonstrating that rotations do not commute.

Rotações não são comutativas



Rotações não são comutativas



Rotações infinitesimais

- A matriz de rotação fica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & (d\phi + d\psi) & 0 \\ -(d\phi + d\psi) & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{bmatrix}$$
- que pode ser escrita como

$$A = 1 + \epsilon$$
- De forma que
- $A^{-1} = 1 - \epsilon$, $\tilde{A} \equiv (1 + \tilde{\epsilon})$ e $AA^{-1} = (1 + \epsilon)(1 - \epsilon) = 1$

Rotações infinitesimais

- Velocidades, acelerações, etc.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \omega \times$$

Força de Coriolis

- Velocidade

$$v_s = v_r + \omega \times r$$
- Aceleração

$$\left(\frac{dv_s}{dt}\right)_s = a_s = \left(\frac{dv_s}{dt}\right)_r + \omega \times v_s = a_r + 2(\omega \times v_r) + \omega \times (\omega \times r)$$
- Força

$$F = ma_s \quad F_{\text{eff}} = F - 2m(\omega \times v_r) - m\omega \times (\omega \times r)$$

Pseudovetores

Ou vetores *axiais*, são vetores matemáticos que se comportam como vetores por transformações próprias (rotações),

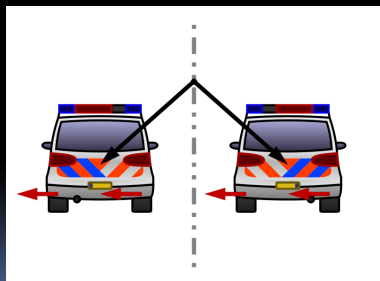
$$r \rightarrow r' \quad p \rightarrow p'$$

mas diferentemente por transformações impróprias (reflexões, p. ex.)

$$r \rightarrow -r' \quad p \rightarrow -p'$$

Ex.: $L = r \times p$

Pseudovetores



Dinâmica do corpo rígido

6 graus de liberdade:

- 3 graus do **centro de massa**: (x, y, z)
- 3 graus de **rotação em torno dele**: (θ, φ, ψ)

Energia cinética

Teorema de Chasles: O deslocamento mais geral possível de um corpo rígido é uma translação seguida (ou precedida) de uma rotação.

A energia cinética fica, então,

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + T'(\phi, \theta, \psi)$$

Nos casos práticos, o potencial pode, também, ser decomposto dessa forma.

Com isso, também a Lagrangeana é decomponível.

Momento angular

O momento angular total do corpo com relação a um ponto estacionário (centro de massa) é

$$\mathbf{L} = m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$$

Como

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \\ &= m_i [\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] \end{aligned}$$

Momento angular

Podemos reescrever isso como

$$L_x = \omega_x m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y m_i x_i y_i - \omega_z m_i x_i z_i,$$

e, igualmente para as outras componentes, ou

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

com $I_{xx} = m_i (r_i^2 - x_i^2)$, $I_{xy} = -m_i x_i y_i$, etc.

Tensor momento de inércia

Temos, aqui, nosso **primeiro exemplo de um tensor**, o tensor momento de inércia

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

Como vimos, vetores transformam-se como

$$x'_i = a_{ij} x_j.$$

Tensores de posto (*rank*) 2 transformam-se como

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}.$$

Tensor momento de inércia

Seus elementos diagonais são chamados de **coeficientes de momento de inércia** e dados por

$$I_{xx} = m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

Seus elementos fora da diagonal são chamados **produtos de inércia** e dados por

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i$$

Tensor momento de inércia

No caso de movimentos em 2 dimensões, todas as rotações ocorrem por eixos perpendiculares ao plano. Com isso, o momento de inércia é um **escalar**.

No caso de movimentos em 3 dimensões, **sempre é possível diagonalizar** o tensor momento de inércia de forma que seus 3 autovetores formem um sistema de coordenadas com estes definindo **eixos de simetria do sistema**.

Tensor momento de inércia

Pode-se, também, estender a expressão, para o caso de corpos contínuos, como

$$I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$$

Tensor momento de inércia

Por exemplo, para um cubo homogêneo de massa M e lado a , considerando a origem das coordenadas num vértice e arestas ao longo dos eixos x , y e z , seu momento de inércia, fazendo $b = Ma^2$, será

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b & -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b & \frac{2}{3}b & -\frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{4}b & \frac{2}{3}b \end{pmatrix}$$

Tensor momento de inércia

Em 2 dimensões, a energia cinética de rotação pode ser expressa como

$$T_{\text{rotation}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Já para movimentos em 3 dimensões,

$$T_{\text{rotation}} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta$$

Tensor momento de inércia

Ou

$$T_{\text{rotation}} = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

onde $\mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}$ é um vetor unitário na direção daquela rotação $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$