4 - A Cinemática do corpo rígido

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

Corpo rígido

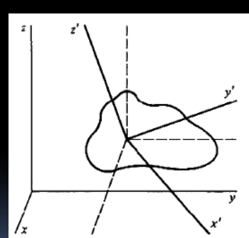
Sistema de partículas sujeitas aos vínculos holonômicos $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$

Embora um corpo com N partículas possa ter $3N$ graus de liberdade, os vínculos acima reduzem esse número para **apenas 6 graus de liberdade**.

Essencialmente, 3 graus do **centro de massa** e 3 graus de **rotação em torno dele**.

Coordenadas do corpo rígido

- Podemos definir um sistema de coordenadas (x', y', z') sobre o corpo rígido, relativo ao sistema definido no espaço (x, y, z).



Coordenadas do corpo rígido

Expressando o mesmo vetor posição tanto num como no outro sistema de coordenadas,

$$\mathbf{r} - x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

extraímos a relação entre os dois sistemas como

$$\begin{aligned}
x' &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{i}') = \cos\theta_{11}x + \cos\theta_{12}y + \cos\theta_{13}z \\
y' &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j}') = \cos\theta_{21}x + \cos\theta_{22}y + \cos\theta_{23}z \\
z' &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}') = \cos\theta_{31}x + \cos\theta_{32}y + \cos\theta_{33}z
\end{aligned}$$

Coordenadas do corpo rígido

Dada a ortonormalidade dos versores de base (i, j, k),

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0, \\
\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,
\end{aligned}$$

resulta

$$\sum_{l=1}^{3}\cos\theta_{lm'}\cos\theta_{lm} = 0 \qquad m \neq m'$$
$$\sum_{l=1}^{3}\cos^2\theta_{lm} = 1.$$

ou

$$\sum_{l=1}^{3}\cos\theta_{lm'}\cos\theta_{lm} = \delta_{m'm}$$

com

$$\begin{aligned}
\delta_{lm} &= 1 \qquad l = m \\
&= 0 \qquad l \neq m.
\end{aligned}$$

perfazendo **6 quantidades independentes**.

Transformações

Podemos reescrever como uma transformação

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r},$$

Transformações sucessivas $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ combinam-se, resultando numa nova transformação $\boldsymbol{C}$

$$\mathsf{C} = \mathsf{AB},$$

Transformações são **não-comutativas**

$$\mathsf{BA} \neq \mathsf{AB},$$

Mas são **associativas**

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}).$$

Transformações

Define-se a **transformação inversa**

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1},$$

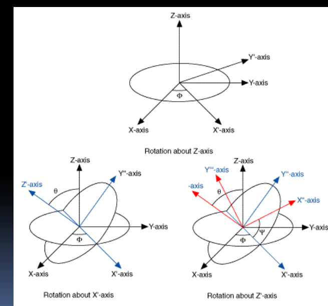
Para transformações ortogonais, vale a relação

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}.$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}.$ é e a **transformação adjunta**

Transformações c/ determinante negativo representam **inversões**, não **translações** de corpos rígidos.

Ângulos de Euler



Ângulos de Euler

Usando os *3* ângulos anteriormente definidos, a transformação pode ser expressa por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Os parâmetros de Cayley-Klein

São *4* parâmetros reais

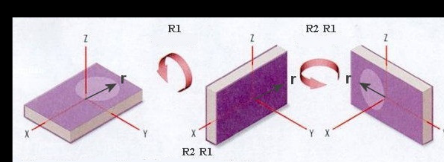
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}$$

sujeitos à condição $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1.$

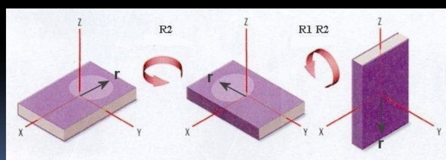
Teorema de Chasles

O deslocamento mais geral possível de um corpo rígido é uma translação seguida (ou precedida) de uma rotação.

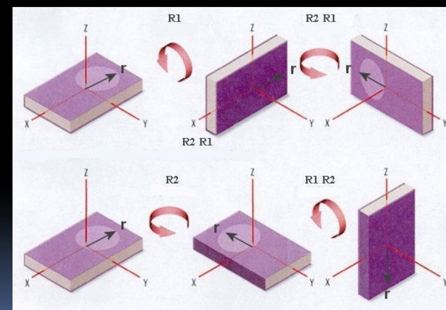
Rotações não são comutativas



Rotações não são comutativas



Rotações não são comutativas



Pseudovetores

Ou vetores *axiais*, são vetores matemáticos que se comportam **como vetores** por **transformações próprias** (rotações),

$v \rightarrow v'$ $\qquad p \rightarrow p'$

mas **diferentemente** por **transformações impróprias** (reflexões, p. ex.)

$v \rightarrow -v'$ $\qquad p \rightarrow p'$

Ex.: $L = r \times p$