3 – O problema das forças centrais

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

Redução a problema de um corpo

Sistema de 2 massas puntiformes m_1 e m_2, sujeitas a uma força central derivada de

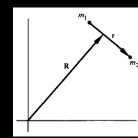
$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ldots)$$

Usando o conceito de centro de massa, a energia cinética fica

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2$$

As 3 coordenadas em R são cíclicas.

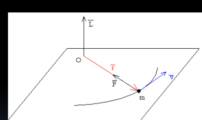
A Lagrangeana corresponde ao de uma partícula com massa reduzida μ.



Força central

Uma **força central** é uma força (atrativa ou repulsiva) cuja magnitude depende **somente da distância** ***r*** do objeto à origem e é dirigida **ao longo da linha que os une (vetor *r*)**.

Com isso, o sistema **tem simetria esférica**.



Movimento é plano

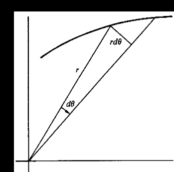
Problema com simetria esférica, então

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constant}$$

e o movimento é no plano perpendicular a L

$$L = T - V$$
$$= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = l = \text{constant}$$



Velocidade areal é constante (2ª Lei de Kepler)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

A importância do problema

Conta-se que Halley visitou Newton em agosto de 1684 com um problema que ele, Robert Hooke e Christopher Wren não tinham conseguido resolver: *"Qual a forma da órbita de um planeta atraído pelo Sol por uma força central que varia com o inverso do quadrado da distância?"* Newton respondeu imediatamente: *"Uma elipse."* Desconcertado, Halley perguntou: *"Como sabe?"*, ao que Newton lhe respondeu que já havia resolvido esse problema antes. Não encontrando o papel com a prova, prometeu reconstruí-la e enviá-la a ele.

Em novembro de 1684, Halley recebeu a prova sob o título *De Motu Corporum in Gyrum* ("Sobre o movimento dos corpos em órbita").

Percebendo a importância do resultado e do método empregado, convenceu Newton a publicar suas descobertas, dando origem ao famoso *Principia Mathematica*.

Equação de movimento em r

Outra EM:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Sendo $f(r)$ derivável do potencial $V(r)$,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r).$$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r).$$

Energia conservada

- Da EM em r,

$$m\ddot r = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right) \qquad m\ddot r \dot r = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot r^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V\right) = 0, \qquad \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = \text{constant.}$$

$$\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2}m^2r^4\dot\theta^2 = \frac{mr^2\dot\theta^2}{2}$$

Força do tipo gravitacional

Força $f = -\frac{k}{r^2}$

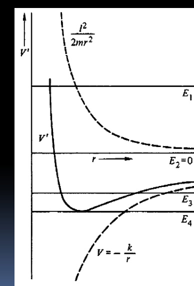
$V = -\frac{k}{r}$ $\quad V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$

E_1, E_2: movimento ilimitado, ponto de retorno em r_1

E_3: movimento limitado, pontos de retorno em r_1 e r_2

E_4: movimento circular

$E<E_4$: v imaginária



Restantes 2 integrais

A partir da conservação da energia,

$$\dot r = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}, \qquad dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

e

$$d\theta = \frac{l\,dt}{mr^2} \qquad \theta = l\int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0$$

com 4 constantes: r_0, θ_0, l e E (e não r_0, θ_0, v_{r0} e $v_{\theta 0}$)

Força inversamente quártica

Temos

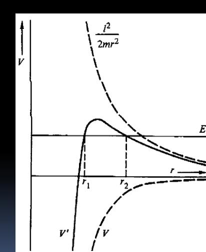
$f = -\frac{3a}{r^4}$ e $V(r) = -\frac{a}{r^3}$

$E<V'$:

$r_0<r_1$ movimento limitado, pontos de retorno em r_1

$R_0>r_1$ movimento ilimitado, pontos de retorno em r_2

$E>V'$: v imaginária



Redução a problema unidimensional

Energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \qquad v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}.$$

Podemos fazer

$$m\ddot r - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \qquad m\ddot r = f' \qquad f' = f + \frac{l^2}{mr^3}$$ (força centrífuga)

Da mesma forma,

$$\frac{1}{2}m\dot r^2 + V' = \text{constant.} \qquad V' = V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} \qquad f' = -\frac{\partial V'}{\partial r}$$

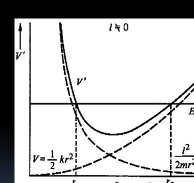
Força do oscilador harmônico

Temos

$f = -kr$ e $V = \frac{1}{2}kr^2$

Se $l=0$, o movimento é limitado e harmônico.

Se $l\neq 0$, o movimento é limitado e elíptico, resultado da combinação de dois movimentos harmônicos perpendiculares (figuras de Lissajous).



Equações de órbita

Sendo

$mr^2\dot{\theta} = l$ $\quad l\,dt = mr^2\,d\theta$ $\quad \frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$

$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$ $\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$

$u = 1/r$ $\quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right)$

$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$ $\quad d\theta = \frac{l\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$

Condições p/ órbitas fechadas

Se $V'(r_0)$ é um mínimo, uma $E(r_0)$ levemente maior do que $V'(r_0)$ produz um movimento ainda **limitado**, embora não circular. (**órbita estável**)

Se $V'(r_0)$ é um máximo, uma $E(r_0)$ levemente maior do que $V'(r_0)$ produz um movimento **ilimitado**. (**órbita instável**)

Tudo depende da segunda derivada de V' em (r_0).

Equações de órbita

Assim,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}}$$

Esta integral pode ser expressa em

- funções trigonométricas p/ $n=1, -2, -3$
- funções elípticas p/ $n=5, 3, 0, -4, -5, -7$
- funções hipergeométricas p/ outros casos

Estabilidade da órbita circular

Para estabilidade da órbita,

$$\left.\frac{\partial^2 V'}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0.$$

$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}$ $\quad \longrightarrow \quad$ $\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=r_0} < -\frac{3f(r_0)}{r_0}$, $\quad \left.\frac{d\ln f}{d\ln r}\right|_{r=r_0} > -3$

Se $f = -kr^n$, $\quad -knr^{n-1} < 3kr^{n-1}$ $\quad n > -3$.

Para órbitas estáveis e pequenos desvios da circularidade: movimento harmônico em torno de $u = u_0 + a\cos\beta\theta.$ $\quad \beta^2 = 3 + \left.\frac{r}{f}\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0}.$ $\quad \beta = p/q = \text{constant.}$

Condições p/ órbitas fechadas

Órbita circular p/ $E(r_0)=V'(r_0)$ máximo ou mínimo

$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = 0.$ $\quad f' = f + \frac{l^2}{mr^3}.$ $\quad \Rightarrow \quad$ $f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}.$

$E = V'(r_0)$ $\quad V' = V + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}.$ $\quad \Rightarrow \quad$ $E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2}.$

Condições para que qualquer força central produza um movimento circular

Teorema de Bertrand

Assim,

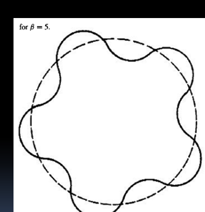
$\frac{d\ln f}{d\ln r} = \beta^2 - 3,$ $\quad f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}.$

Bertrand demonstrou que só há órbitas fechadas com desvios maiores p/

$f = -\frac{k}{r^2}.$ $\quad \beta^2 = 1$ (gravitacional)

e

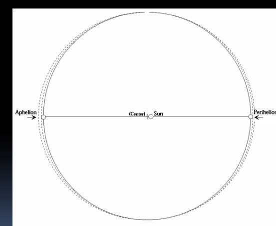
$f = -kr,$ $\quad \beta^2 = 4.$ (Hooke)



Validade no Universo

- Todos os objetos celestes ligados conhecidos movem-se, pelo menos em 1ª aproximação, em órbitas fechadas.
- Como a Lei de Hooke não é realista para todas as distâncias (a 'mola' é limitada), conclui-se que essa observação valida a crença de que é geral a afirmação de que a força gravitacional varia com o quadrado da distância.

Qual a excentricidade da órbita da Terra?



O problema de Kepler

Para o potencial gravitacional, a integral resulta

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}},$$

com solução $\frac{1}{r} = C[1 + e\cos(\theta - \theta')],$

onde e é a excentricidade da órbita

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}.$$

e C é $C = mk/l^2$

Calculando os eixos apsidais

O eixo maior da elipse depende só de E.

Nos pontos apsidais r_1 e r_2, $v=0$.

De $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V = \text{constant}.$ $E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0$

Esses pontos são as raízes da eq. acima.

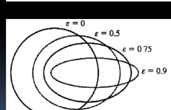
$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0. \qquad a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}, \qquad \frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2), \qquad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \theta')}.$$

Natureza das órbita

Temos

$e > 1,$	$E > 0:$	hyperbola,
$e = 1,$	$E = 0:$	parabola,
$e < 1,$	$E < 0:$	ellipse,
$e = 0,$	$E = -\frac{mk^2}{2l^2}:$	circle.



Qual a excentricidade da órbita da Terra?

Movimento kepleriano

As integrais

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}}. \qquad t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e\cos(\theta - \theta')]^2}.$$

podem ser resolvidas, mas sua inversão para $r(t)$ e $\theta(t)$ é muito difícil.

O resultado mais importante é sua 3ª Lei:

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_2}},$$

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

Temos $\dot{\mathbf{p}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$

$$\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} = \frac{mf(r)}{r}[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] = \frac{mf(r)}{r}\left[\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2\dot{\mathbf{r}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -mf(r)r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right).$$

Se $f = -\frac{k}{r^2}$ $\quad \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mk\mathbf{r}}{r}\right).$

há um vetor conservado $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}.$

A hipótese de Dirac

$$2\epsilon_0 hc/e^2 \cong 137 \qquad eg/\epsilon_0 hc^2 = n$$

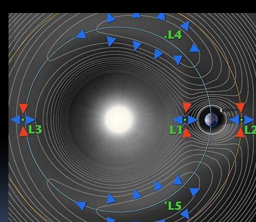
Problema de três corpos

Para cada corpo, uma equação da forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}$$

O sistema de equações acopladas não tem solução geral, apenas soluções particulares.

Os pontos de Lagrange são pontos de mínimo ou de sela do potencial.



Campo magnético 'Coulombiano'

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Monopolos magnéticos

Força de Lorentz

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Equação de movimento

$$\mu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0}{4\pi}eg\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Equações de movimento

$$\mu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e_1\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)+g_1\left(\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\frac{\mu_0}{4\pi}\kappa\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$q = e_1e_2+g_1g_2/c^2$$

$$\kappa = e_1g_2-g_1e_2$$

Transformações de dualidade

$$\boldsymbol{E}\to c\boldsymbol{B},\ c\boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{E}$$

$$\rho_\mathrm{e}\to\rho_\mathrm{m}/c,\ \text{and}\ \boldsymbol{j}_\mathrm{e}\to\boldsymbol{j}_\mathrm{m}/c$$

Lagrangiana

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\mu r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}+\frac{\mu_0}{4\pi}\kappa\cos\theta\dot{\phi}$$

Equações de Maxwell generalizadas

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} & = \rho_\mathrm{e}/\epsilon_0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} & = \boxed{-\mu_0\boldsymbol{j}_\mathrm{m}}-\partial\boldsymbol{B}/\partial t\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} & = \boxed{\mu_0\rho_\mathrm{m}}\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} & = \mu_0\boldsymbol{j}_\mathrm{e}+\mu_0\epsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t\end{cases}$$

Equações de movimento

$$\mu\ddot{r}-\mu r\dot{\theta}^2-\mu r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}=0$$

$$\mu r^2\ddot{\theta}+2\mu r\dot{r}\dot{\theta}-\mu r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2=-\frac{\mu_0}{4\pi}\kappa\sin\theta\,\dot{\phi}$$

$$\mu r^2\sin^2\theta\,\ddot{\phi}+2\mu r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi}+2\mu r\dot{r}\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2=\frac{\mu_0}{4\pi}\kappa\sin\theta\,\dot{\theta}$$

Momento angular

$$\boldsymbol{L} = \mu \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$
$$= \mu r^2 \sin\theta\, \dot{\phi}\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mu r^2 \dot{\theta}\, \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$J^2 = L^2 + \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \kappa^2$$

Momento angular não conservado

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_r = 0,$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_\theta = -\mu r^2 \sin\theta\, \ddot{\phi} - 2\mu r^2 \cos\theta\, \dot{\theta}\dot{\phi} - 2\mu r\dot{r} \sin\theta\, \dot{\phi}^2$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)_\phi = \mu r^2 \ddot{\theta} + 2\mu r\dot{r}\dot{\theta} - \mu r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi}^2$$

$$\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = \left(\mu \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} + \frac{\mu_0}{4\pi}\kappa \hat{\boldsymbol{r}}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\kappa$$

Integral de Poincaré

$$\boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{L} + \frac{\mu_0}{4\pi}\kappa \hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\cos\alpha \equiv \frac{\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{J}$$

Equação de órbita

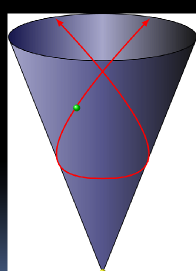
$$\frac{1}{r} = -\frac{\mu q}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left[1 + \varepsilon\cos\left(\beta - \beta'\right)\right]$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 32\pi^2\epsilon_0^2 E L^2/\mu q^2}$$

Condição para órbitas fechadas

$$\sin\alpha = \frac{m}{n}$$

Movimento num cone



Monopolos magnéticos

No caso da interação de 2 dyons,

$$\frac{1}{r} = C\{1 + e\cos[(\sin\alpha)(\theta - \theta_0)]\}$$

onde α é interpretado como o ângulo entre r e J, a integral de Poincaré

O movimento não é plano, mas se dá sobre a superfície de um cone!

A órbita só será fechada se $\sin\alpha$ for racional.