2 – Princípio de Hamilton

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

Princípio de Hamilton

- Princípio de D'Alambert (diferencial)

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

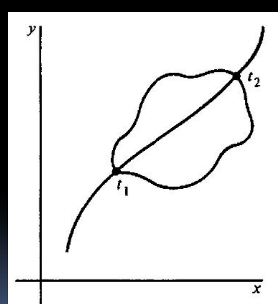
- Princípio de Hamilton (integral)

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt = 0$$

- em vez de deslocamentos virtuais em torno de um estado instantâneo, aqui trata-se de **variações virtuais** de **todo o movimento**, desde t_1 a t_2.

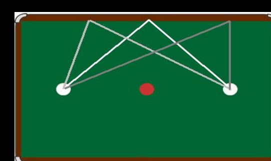
Princípio de Hamilton

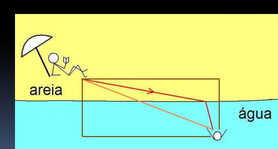
- A integral *I* tem um valor estacionário para o caminho no espaço de configurações
- 'Estacionário' significa que tem o mesmo valor em caminhos 'próximos' nesse espaço



Princípio de Hamilton

- Derivado do Princípio da Mínima Ação de Maupertuis: "a Natureza é econômica em todas as suas ações"
- A Natureza 'escolhe' o caminho que resulta em menor ação, seja no bilhar, seja na Óptica.





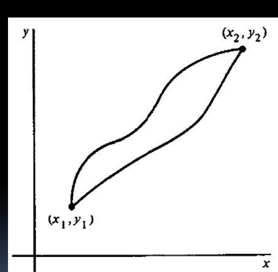
Princípio de Hamilton

- Encontrar um *y(x)* tal que a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx$$

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$$

tenha um valor estacionário para variações de caminho em torno de *y(x)*



Princípio de Hamilton

- Sendo α um parâmetro que designa os vários caminhos em torno de $y(x)=y(x,0)$, com $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$$

resulta

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x\right)\, dx$$

Princípio de Hamilton

- A condição da estacionariedade, então, é

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0.$$

e, assim,

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}\right) dx$$

de que, integrando por partes o segundo termo, resulta

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}\, dx$$

Princípio de Hamilton

- A condição de estacionaridade implica, então, que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 dx = 0$$

- Da arbitrariedade do segundo fator, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0.$$

Princípio de Hamilton

O termo abaixo corresponde ao trabalho virtual, visto anteriormente

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha \equiv \delta y$$

E podemos, também, escrever a variação infinitesimal da integral *J* por caminhos em torno de *y(x)* como

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_0 d\alpha \equiv \delta J$$

Com isso, a condição de estacionariedade resulta

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\, dx = 0$$

Exemplo

Caminho mais curto entre dois pontos num plano

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x)\, dx,$$

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$$

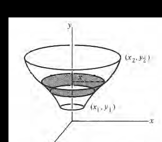
$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

$$\dot{y} = a = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

$$y = ax + b$$

Exemplo

- Superfície mínima de revolução



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx$$

$$2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) = 0$$

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a,$$

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2,$$

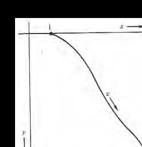
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$$y = a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc\,cosh}\frac{x}{a} + b$$

$$x = a\cosh\frac{y - b}{a},$$

Exemplo

- Braquistócrona



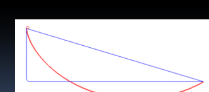
$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgy$$

$$v = \sqrt{2gy}.$$

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx.$$

$$\frac{y}{a} = 1 - \cos\left[\frac{x + \sqrt{y(2a - y)}}{a}\right],$$



Sistemas não-holonômicos

- As q_i não são independentes
- Caminhos (e desl. virtuais) têm de ser consistentes com os vínculos
- Vínculos semi-holonômicos: $f_\alpha(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1 \ldots, \dot{q}_n) = 0,$
- Geralmente, $\sum_k a_{ik}\, dq_k + a_{it}\, dt = 0.$
- Introduzem-se *Multiplicadores de Lagrange* λ_α

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha f_\alpha = 0,$$

Sistemas não-holonômicos

Introduzindo essa condição na variação da integral, resulta

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt = 0$$

agora, com *m+n* variáveis independentes q_i e λ_α, resultando

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k,$$

e

$$Q_k = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \lambda_\alpha \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k}\right) \right] - \frac{d\lambda_\alpha}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right\}$$

Forças adicionais de vínculos semiholonômicos não devem realizar trabalho nos correspondentes deslocamentos

Exemplo

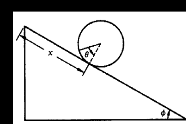
$$L = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - V(x, y, z)$$

$$f(\dot{x}, \dot{y}, y) = \dot{x}\dot{y} + ky = 0$$

$$m\ddot{x} + \lambda\ddot{y} + \dot{\lambda}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$
$$m\ddot{y} + \lambda\ddot{x} - k\lambda + \dot{\lambda}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$
$$m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$\dot{y}\dot{x} + ky = 0.$$

Exemplo

Aro descendo um plano inclinado sem deslizar



Vínculo: $r\, d\theta = dx.$

$$T = \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2.$$

$$V = Mg(l - x)\sin\phi,$$

$$L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{\theta}^2}{2} - Mg(l - x)\sin\phi.$$

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi + \lambda = 0,$$
$$Mr^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0,$$

$$r\dot{\theta} = \dot{x},$$

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$

$$M\ddot{x} = \lambda,$$

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\phi}{2}.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\phi}{2r}.$$

$$\lambda = \frac{Mg\sin\phi}{2}$$

Equivalência a outros campos

Circuito LC

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

$$q = q_0 \cos\omega_0 t,$$

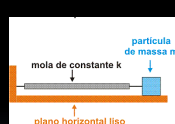
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Oscilador harmônico

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

$$x = x_0 \cos\omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}.$$



Analogia estrutural

- Resultados e técnicas em um campo podem ser aplicados a outro se as Lagrangeanas tiverem a mesma estrutura
- Termos como reatância e suscetibilidade são usados em outros campos
- 'Equações de movimento': de Newton, de Maxwell ou de Schrödinger
- Quantização na Mecânica transladada para a Teoria da Radiação (fóton, QED) e para a de Campos (partículas, QCD)

Simetrias e conservações

Mesmo quando não se consegue resolver as EM, geralmente se podem obter as 1as integrais (leis de conservação)

Ex.: Momento

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}.$$

Momento conjugado a q_j: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$

(não tem de ter dimensão de mom. linear)

Simetrias e conservações

Coordenada (independente) cíclica

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad p_j = \text{constant.}$$

Ex.: carga movendo-se num campo magnético tal que nem φ nem $\mathbf{A}$ dependem de x. Com isso, L também não depende de x.

$$p_x = m\dot{x} + qA_x = \text{constant.}$$

Simetrias e conservações

- Ex.: aro rolando no plano
- L não depende de θ, mas o momento angular

  $$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

- não é constante porque há forças (condições) de vínculo: $r d\theta = dx$

Translações e rotações

Translação global do sistema na coordenada q_j

T não depende de q_j e assume-se $V \neq V(v_j)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \quad L = T - V,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j = 0$$

Translação global ou rotação em q_j: $Q_j = 0.$

(sistema invariante) $p_j = \text{constant.}$

Conservação da energia

Seja $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right), \quad \frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Função energia (pode corresponder a E ou não):

$$h(q_1, \ldots, q_n; \quad \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; \quad t) = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$