1 – Equações de Euler-Lagrange

TÓPICOS FUNDAMENTAIS DE FÍSICA

Revisão de Física

- Leis de Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}},$$

- Dinâmica angular
  - Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

  - Torque

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Revisão de Física

- Conservações
  - De momento linear

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}},$$

  - De momento angular

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{L}}.$$

Revisão de Física

- Trabalho

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

- Energia cinética

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\, dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2)\, dt,$$

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

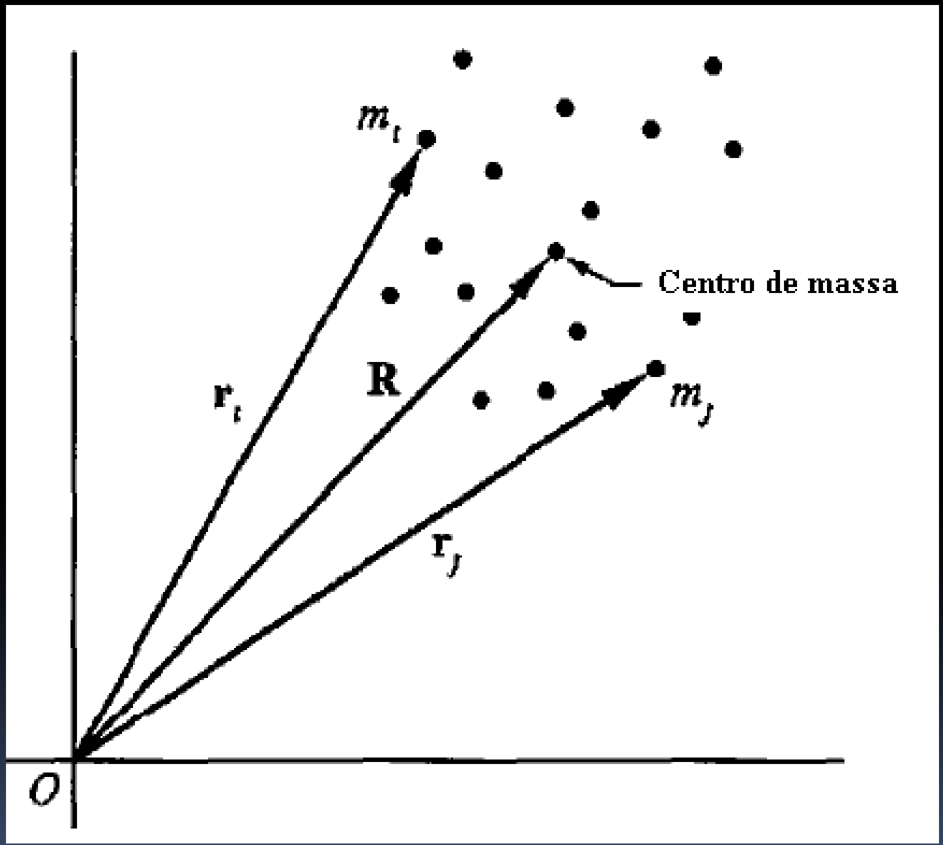
Sistemas de partículas

- Referencial do centro de massa

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{R}$$

- Decomposição das velocidades (D. Bernoulli, 1726)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}$$



Sistemas de partículas

- Forças externas e internas

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i ,$$

- Centro de massa

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M},$$

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)},$$

Sistemas de partículas

- Momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i .$$

- Energia cinética

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$$

Vínculos

- Holonômicos ('lei inteira')

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, t) = 0,$$

Ex.: Corpo rígido: $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$

Trajetória circular: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

- Não-holonômicos

Ex.: Gás num recipiente: $(r_i - r_j)^2 - c^2 \leq 0$

Vínculos

- Problemas:

1. Coordenadas não são mais independentes.

$\Rightarrow$ Eqs. de movimento não são mais independentes

Holonômicos $\Rightarrow$ Introduzir **coordenadas generalizadas**

2. Forças de vínculo são desconhecidas e descobri-las é resolver o problema.

$\Rightarrow$ Formular mecânica de forma que desapareçam.

Coordenadas generalizadas

- Generalizadas
  - *N partículas: 3N coordenadas* + *k* equações de vínculo
  - $\Rightarrow$ *3N-k* coordenadas generalizadas (graus de liberdade)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-k}, t)$$

Sistemas de coordenadas

- Esféricas,
- Hiperbólicas,
- Elípticas,
- Cilíndricas,
- etc.

Coordenadas polares

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

- Derivadas:

$$r\frac{\partial f}{\partial r} = r\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

$$r\frac{\partial}{\partial r} = r\frac{\partial}{\partial x}\cos\theta + r\frac{\partial}{\partial y}\sin\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial}{\partial y}\cos\theta$$

- Versores:

$$\hat{r} = (\cos\theta\,, \sin\theta)$$
$$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

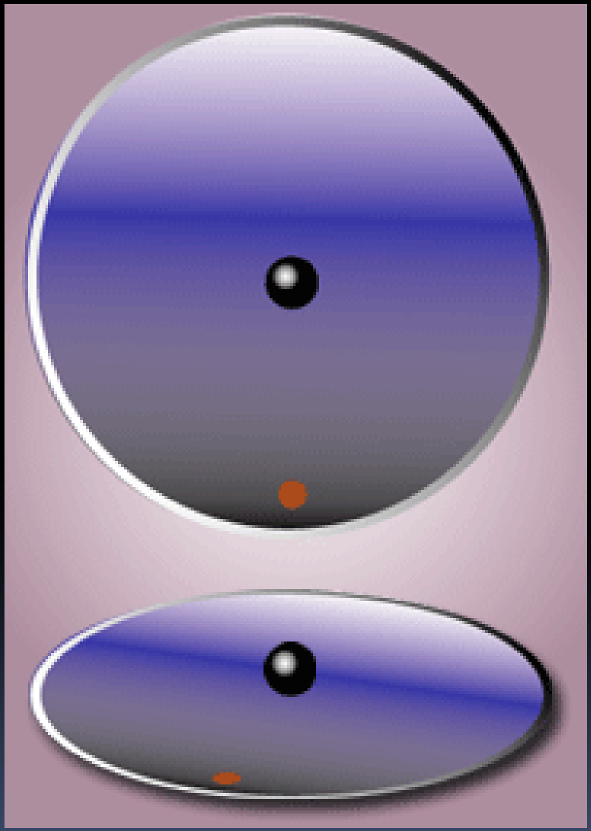
Coordenadas polares

- Posição, velocidade e aceleração

$$
\begin{aligned}
r &= (x, y) = r(\cos\theta\,, \sin\theta) \\
&= r\hat{r} \\
\dot{r} &= (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{r}(\cos\theta\,, \sin\theta) + r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) \\
&= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\
\ddot{r} &= \ddot{r}(\cos\theta, \sin\theta) + 2r\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) \\
&\quad + r\ddot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) - r\dot{\theta}^2(\cos\theta, \sin\theta) \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\right)\hat{\theta}
\end{aligned}
$$

- Força centrípeta e força de Coriolis

Força de Coriolis



Coordenadas generalizadas

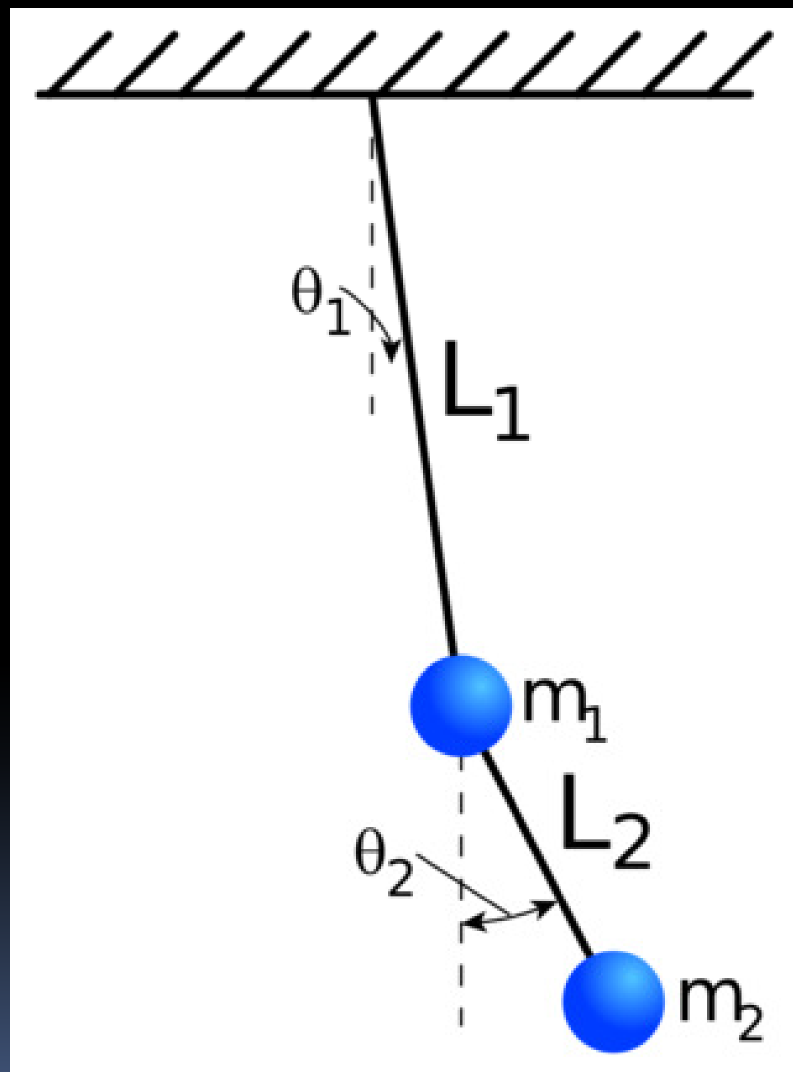
- Sistema de coordenadas curvilíneas sobre o espaço (variedade) de configuração de um mecanismo ou sistema mecânico com um número finito N de graus de liberdade.
- O estado físico de um sistema mecânico é representado por um ponto do espaço de configuração "ampliado" dimensão $2N$.

Coordenadas generalizadas

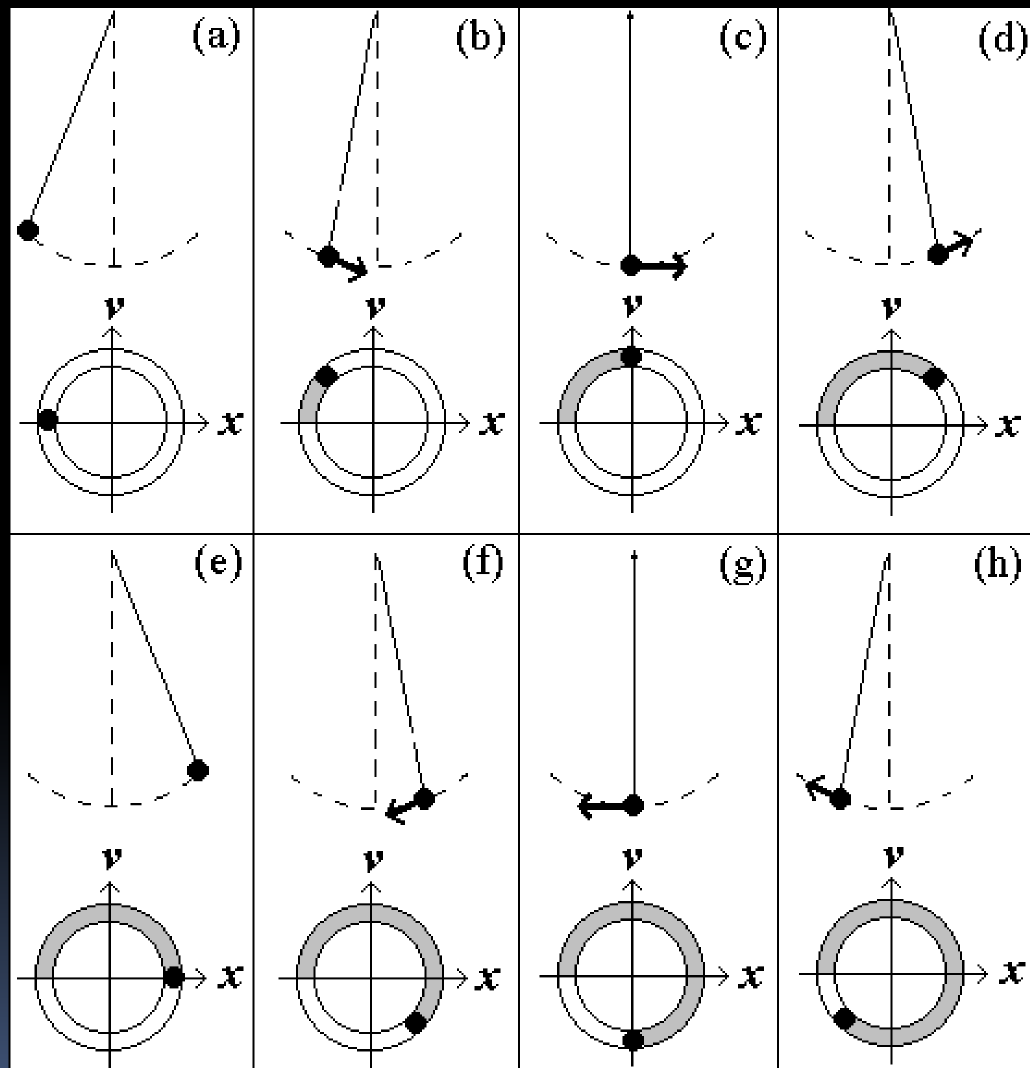
- Podem ser
  - as amplitudes de uma expansão de Fourier de *r*,
  - quantidades com dimensões de energia ou de momento angular,
  - etc.

- Ex.:
  - Pêndulo duplo: θ_1, θ_2
  - Pêndulo: x, y

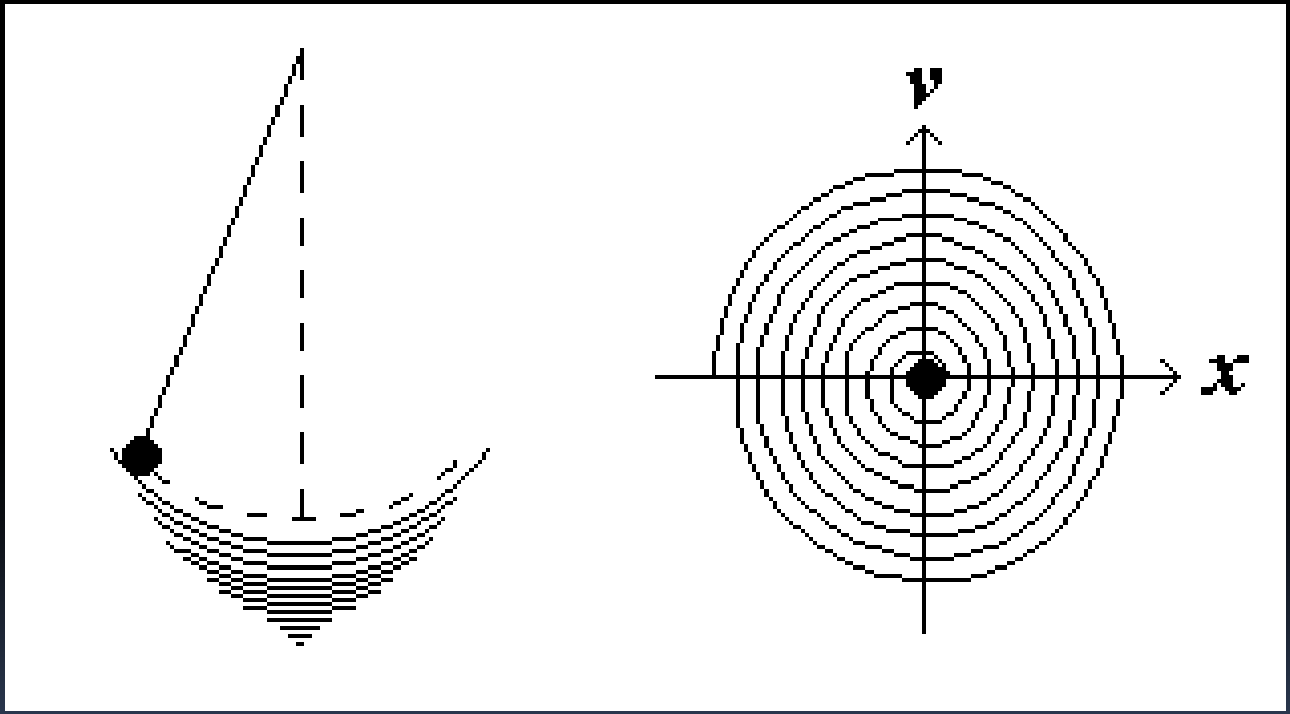
Exemplo: Pêndulo duplo



Exemplo: Pêndulo ideal



Exemplo: Pêndulo real



Princípio de D'Alambert

- Num sistema em equilíbrio, o trabalho realizado por deslocamentos virtuais é nulo.

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

- $\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0, \quad \Rightarrow \quad \sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$

Princípio de D'Alambert

- Em termos das coordenadas generalizadas,

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

$$\sum \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

onde

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Equações de Euler-Lagrange

- Para forças deriváveis de um potencial escalar,

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V. \Rightarrow Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad \text{onde} \quad L = T - V,$$

Equações de Euler-Lagrange

- Criadas por Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange na década de 1750.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(t,q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L(t,q,\dot{q})}{\partial q_i}=0$$

Mecânica Lagrangeana

- Formulação da mecânica clássica que combina a **conservação do momento linear** com a **conservação da energia**.

- A evolução de um sistema físico é descrita pela solução da Equação de Euler-Lagrange para a **ação** do sistema.

Ação

- Conceito criado por Maupertuis e Euler.

- Integral temporal, ao longo do percurso do ponto A ao ponto B, da *vis viva*, isto é, do dobro da energia cinética.

$$\int_{t_A}^{t_B} mv^2\,dt$$

Princípio da mínima ação

- É um princípio **metafísico** e **variacional**, desenvolvido por Herão, Fermat, Maupertuis e Euler, e que está subjacente a todas as leis da Mecânica.
  - "*A Natureza é econômica em todas as suas ações*" (Maupertuis).
- A Natureza 'escolhe' sempre o caminho que minimiza a grandeza física ação

Mecânica Lagrangeana

- Equivalente às leis de Newton do movimento.
- Dispensa o conhecimento das forças envolvidas.
- Possui a mesma forma independente do **sistema de coordenadas generalizadas** utilizado.
- Baseada num **formalismo escalar** mais simples e geral do que o formalismo vetorial de newtoniano.
- Descreve igualmente bem fenômenos a baixas velocidades ou a **velocidades relativísticas**.

Mecânica Lagrangeana

Roteiro:

1. Expressar *T* e *V* em coordenadas generalizadas

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

2. Calcular *L* e suas derivadas
3. Aplicar na EqEL

Exemplo

- Partícula livre no espaço (coord. cartesianas)

$$V = 0 \quad \text{e} \quad T = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z.$$

Exemplo

- Partícula livre no espaço (coord. polares)

$$V = 0$$

e

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right]$$

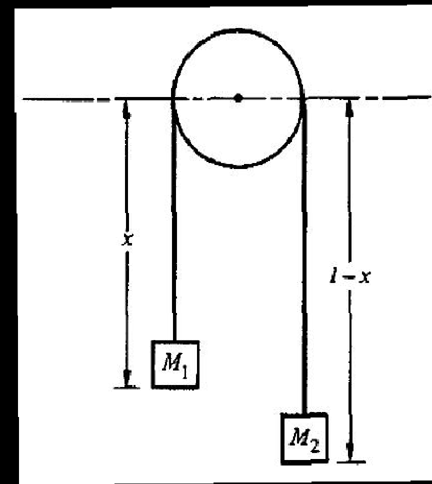
$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \qquad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta$$

Exemplo

- Máquina de Atwood



$$V = -M_1 g x - M_2 g(l - x)$$

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g(l - x)$$

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g,$$

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g$$

Exemplo

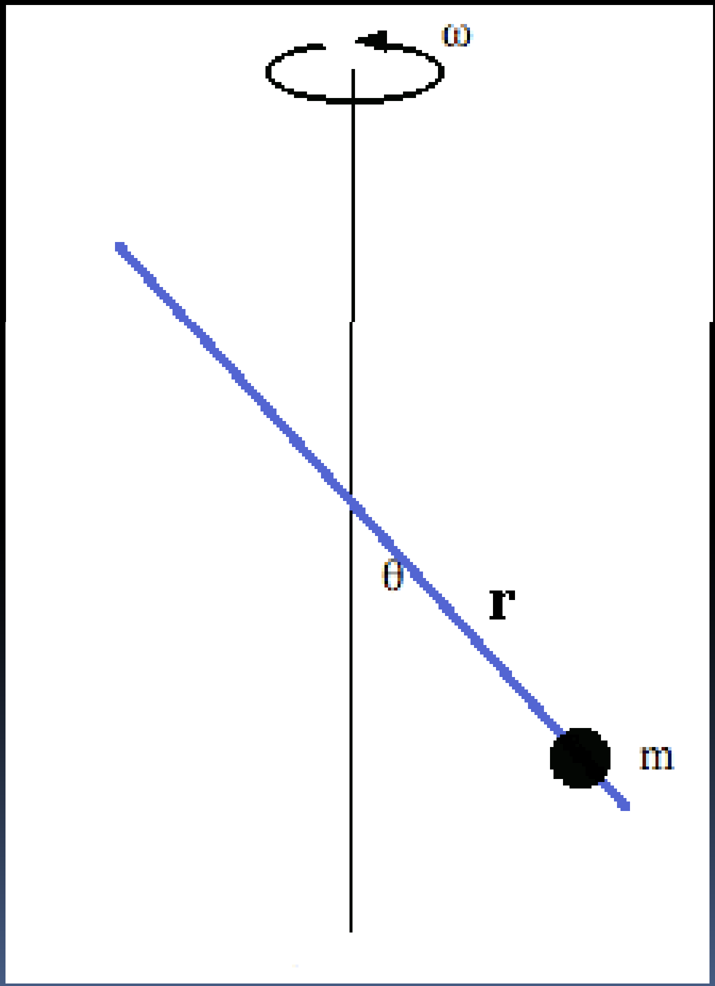
- Pérola deslizando por fio girando por eixo perpendicular

$$x = r\cos\omega t,$$

$$y = r\sin\omega t.$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right).$$

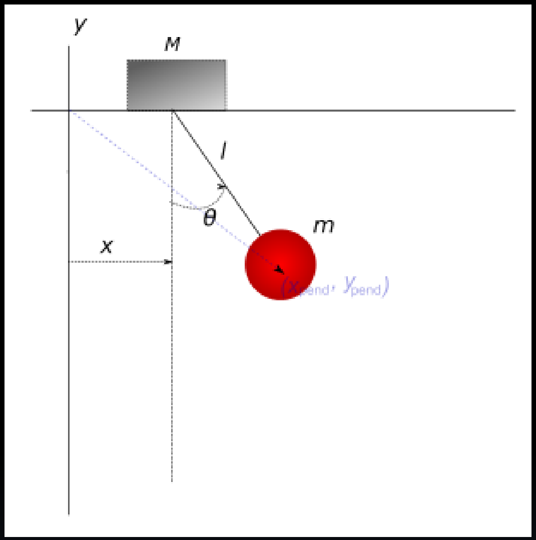
$$m\ddot{r} = mr\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = e^{\omega t}$$



Exemplo

- Pêndulo sobre um suporte móvel

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\text{pend}}^2 + \dot{y}_{\text{pend}}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\ell\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right]
\end{aligned}
$$



$$
V = mgy_{\text{pend}} = -mg\ell\cos\theta
$$

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\ell\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mg\ell\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Pêndulo sobre um suporte móvel (cont.)

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\ell\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mg\ell\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + m\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(M+m)\dot{x} + m\ell\dot{\theta}\cos\theta\right] = 0$$

$$(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(\dot{x}\ell\cos\theta + \ell^2\dot{\theta})\right] + m\ell(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{\ell}\cos\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$