8 - Oscilador Harmônico

Mecânica Quântica

Oscilador Harmônico

- Em Física, o oscilador harmônico é qualquer sistema que apresenta movimento oscilatório, de forma harmônica, em torno de um ponto de equilíbrio.
- O oscilador pode ser
  - forçado (sujeito a uma força externa),
  - amortecido (sujeito a alguma força de atrito) ou
  - complexo (envolvendo várias massas e molas). O caso mais simples é o do oscilador harmônico simples, formado por uma massa presa a uma mola.

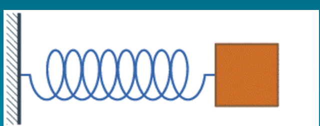
Oscilador Harmônico

- Embora este sistema seja uma mera idealização físico-matemática, constitui-se num modelo para muitos outros sistemas reais e complexos e, por isso, justifica-se seu estudo.
- Há vários outros sistemas físicos que são análogos do oscilador mecânico, como por exemplo, um circuito RLC.
- Vale lembrar que Planck utilizou este sistema para modelizar a vibração dos átomos na cavidade de um corpo negro, possibilitando-lhe chegar à sua Lei

Oscilador Harmônico Simples

Oscilador harmônico simples

- sistema ideal constituído de uma massa *m* e uma mola *k* sobre uma superfície sem atrito



Oscilador harmônico simples

- a força que a mola exerce sobre a massa é do tipo restauradora pois sempre está direcionada de forma a, sendo a massa deslocada do seu ponto de equilíbrio, trazê-la de volta a esse ponto.
- Essa força é descrita pela Lei de Hooke
- lembrando que a aceleração *a* é a derivada segunda da posição

$$\text{Lei de Newton}: F = ma = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{Lei de Hooke}: F = -kx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0 x$$

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx$$

Oscilador harmônico simples

- Esta equação pode ser resolvida com a seguinte solução

$$x = a\,sen\left(\sqrt{k/m}\,t\right) + b\cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$$

- podemos definir ω_0 como a freqüência angular do oscilador

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Oscilador harmônico simples

- ... ficando a solução como

$$x = a\,sen(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$$

Oscilador harmônico simples

- Pode-se, no entanto, sem perda de generalidade, fazer a seguinte transformação

$$a = A\cos\delta,\ b = A\,sen\,\delta$$

- Onde
  - Amplitude: A
  - fase inicial: δ

$$x = A\cos\delta\,sen(\omega_0 t) + A\,sen\,\delta\cos(\omega_0 t)$$

- resultando

Oscilador harmônico simples

- ou, utilizando a identidade trigonométrica

$$sen(a+b) = sen\,a\cdot\cos b + sen\,b\cdot\cos a$$

- como
- Onde o período é dado por $T=2\pi/\omega_0^{1/2}$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$$

Oscilador harmônico simples

- Em todo instante, a energia do sistema será dada pela soma da energia cinética da massa

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

- com a energia elástica armazenada na mola

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$$

Oscilador harmônico simples

- De forma que a energia total vale a energia elástica da mola em sua deformação máxima *A*

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Oscilador Quântico

Oscilador quântico

- O oscilador harmônico quântico é o análogo do oscilador clássico.
- Aqui o objeto quântico está sujeito a um potencial idêntico àquele, sendo dado por

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

- Com isso, a equação de Schrödinger independente do tempo resulta

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Oscilador quântico

- Observa-se do termo central da equação que, para que ela seja satisfeita, é preciso que a derivada segunda da função de onda resulte em algo como $x^2\varphi(x)$.

$$\frac{1}{2}kx^2\varphi(x)$$

- Para que isso aconteça, é preciso que a derivada primeira da função de onda seja algo como $x\varphi(x)$.
- Uma possível solução, que satisfaz a exigência acima, seria da forma exponencial

$$\varphi(x) = Ae^{-bx^2}$$

Oscilador quântico

- De fato,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{dAe^{-bx^2}}{dx} = -2bxAe^{-bx^2} = -2bx\varphi(x)$$

- e

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{d\left(-2bxAe^{-bx^2}\right)}{dx} = \left(-2b + 4b^2x^2\right)Ae^{-bx^2}$$

Oscilador quântico

- Note-se que o sinal de menos no expoente é necessário para que esta função se anule no infinito, condição de contorno geral para as soluções da equação de onda.
- Substituindo esta solução na equação anterior, resulta

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2b + 4b^2x^2\right)Ae^{-bx^2} + \frac{1}{2}kx^2Ae^{-bx^2} = EAe^{-bx^2}$$

Oscilador quântico

- Para que esta equação tenha solução, é preciso que ela seja válida ordem a ordem de *x*.

$$\frac{\hbar^2}{2m}2bAe^{-bx^2} = EAe^{-bx^2}$$

- Desta forma, ela se desdobra em duas:
- e

$$-\frac{\hbar^2}{2m}4b^2x^2Ae^{-bx^2} + \frac{1}{2}kx^2Ae^{-bx^2} = 0$$

Oscilador quântico

- Da primeira, resulta uma relação para a energia, em função da constante *b*

$$E = \frac{\hbar^2}{m} b$$

Oscilador quântico

- Como a função de onda não pode ser nula em todo o espaço, da segunda equação, resulta que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} 4b^2 + \frac{1}{2} k = 0$$

- ou, resolvendo para *b*,

$$\frac{\hbar^2}{2m} 4b^2 = \frac{k}{2}$$

$$b^2 = \frac{mk}{4\hbar^2}$$

$$b = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

Oscilador quântico

- E, lembrando novamente que

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

- resulta

$$b = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

Oscilador quântico

- Retornando este valor de *b* à equação anterior, temos

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

- ou, simplificando *m*,

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Oscilador quântico

- Note-se que o valor mais baixo da energia é **diferente de zero**, ao contrário do caso clássico, e se denomina **energia do estado fundamental** ou **energia do ponto zero**.

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Oscilador quântico

- A função de onda, por sua vez, fica

$$\varphi(x) = Ae^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}$$

- Na verdade, esta não é a solução mais geral para a equação de Schrödinger para o potencial do oscilador harmônico. Pode-se mostrar que esta solução, multiplicada por um polinômio em *x* também pode ser solução.

Oscilador quântico

- A solução geral é, então, com *n=1,2,3,etc.,*

$$\varphi_n(x) = AH_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}$$

- Onde $H_n(x)$ são os chamados polinômios de Hermite

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= (2x)^2 - 2 \\ H_3(x) &= (2x)^3 - 6(2x) \\ H_4(x) &= (2x)^4 - 12(2x)^2 + 12 \\ &\ldots \end{aligned}$$

25-set-2009 © www.fisica-interessante.com 25/47

Oscilador quântico

- E a energia fica, com *n=1,2,3,etc.,*

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

- *Note que as energias estão "quantizadas" e somente podem tomar valores discretos, em frações semi-inteiras 1/2, 3/2, 5/2, ... de* $h\omega$*.*

25-set-2009 © www.fisica-interessante.com 26/47

- *Este resultado é característico dos sistemas mecâno-quânticos.*
- *A razão última é que os níveis de energia estão equiespaçados, ao contrário do modelo de Bohr ou do potencial caixa.*

25-set-2009 © www.fisica-interessante.com 27/47

Exercícios

- 1) Calcule a energia total do oscilador harmônico clássico, sabendo que ela será dada pela soma da energia cinética da massa com a energia elástica armazenada na mola e mostre que corresponde à energia elástica da mola em sua deformação máxima *A*.
- 2) Esboce um gráfico da função de onda do oscilador harmônico quântico para e localize o ponto no eixo mais provável para se encontrar a partícula.

25-set-2009 © www.fisica-interessante.com 28/47

Referências

25-set-2009 © www.fisica-interessante.com 29/47

Referências

- PESSOA, Jr., Osvaldo. Interferometria, Interpretação e Intuição: uma Introdução conceitual à Física Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, mar. 1997. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_27.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2008

25-set-2009 © www.fisica-interessante.com 30/47

Referências

- http://pt.wikipedia.org/wiki/Espectroscopia
- http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/discharge/index.html