

8 - Oscilador Harmônico

Mecânica Quântica

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

1/47

Oscilador Harmônico

- Em Física, o oscilador harmônico é qualquer sistema que apresenta movimento oscilatório, de forma harmônica, em torno de um ponto de equilíbrio.
- O oscilador pode ser
 - **forçado** (sujeito a uma força externa),
 - **amortecido** (sujeito a alguma força de atrito) ou
 - **complexo** (envolvendo várias massas e molas). O caso mais simples é o do oscilador harmônico simples, formado por uma massa presa a uma mola.

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

2/47

Oscilador Harmônico

- Embora este sistema seja uma mera idealização físico-matemática, constitui-se num modelo para muitos outros sistemas reais e complexos e, por isso, justifica-se seu estudo.
- Há vários outros sistemas físicos que são análogos do oscilador mecânico, como por exemplo, um circuito RLC.
- Vale lembrar que Planck utilizou este sistema para **modelizar** a vibração dos átomos na cavidade de um corpo negro, possibilitando-lhe chegar à sua Lei

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

3/47

Oscilador Harmônico Simples

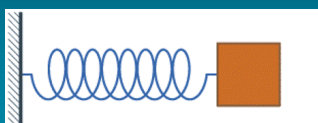
25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

4/47

Oscilador harmônico simples

- sistema ideal constituído de uma massa m e uma mola k sobre uma superfície sem atrito



25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

5/47

Oscilador harmônico simples

- a força que a mola exerce sobre a massa é do tipo restauradora pois sempre está direcionada de forma a, sendo a massa deslocada do seu ponto de equilíbrio, trazê-la de volta a esse ponto.
- Essa força é descrita pela Lei de Hooke
- lembrando que a aceleração a é a derivada segunda da posição

$$\text{Lei de Newton : } F = ma = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{Lei de Hooke : } F = -kx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2x$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

6/47

Oscilador harmônico simples

- Esta equação pode ser resolvida com a seguinte solução

$$x = a \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}t) + b \operatorname{cos}(\sqrt{k/m}t)$$

- podemos definir ω_0 como a frequência angular do oscilador

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

7/47

Oscilador harmônico simples

- ... ficando a solução como

$$x = a \operatorname{sen}(\omega_0 t) + b \operatorname{cos}(\omega_0 t)$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

8/47

Oscilador harmônico simples

- Pode-se, no entanto, sem perda de generalidade, fazer a seguinte transformação

$$a = A \operatorname{cos} \delta, b = A \operatorname{sen} \delta$$

- Onde

- Amplitude: A
- fase inicial: δ

$$x = A \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen}(\omega_0 t) + A \operatorname{sen} \delta \operatorname{cos}(\omega_0 t)$$

- resultando

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

9/47

Oscilador harmônico simples

- ou, utilizando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{cos}b + \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{cos}a$$

- como
- Onde o período é dado por $T=2\pi/\omega_0$

$$x(t) = A \operatorname{cos}(\omega_0 t + \delta)$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

10/47

Oscilador harmônico simples

- Em todo instante, a energia do sistema será dada pela soma da energia cinética da massa

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

- com a energia elástica armazenada na mola

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

11/47

Oscilador harmônico simples

- De forma que a energia total vale a energia elástica da mola em sua deformação máxima A

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

12/47

Oscilador Quântico

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

13/47

Oscilador quântico

- O oscilador harmônico quântico é o análogo do oscilador clássico.
- Aqui o objeto quântico está sujeito a um potencial idêntico àquele, sendo dado por
- Com isso, a equação de Schrödinger independente do tempo resulta

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \varphi(x) = E\varphi(x)$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

14/47

Oscilador quântico

- Observa-se do termo central da equação que, para que ela seja satisfeita, é preciso que a derivada segunda da função de onda resulte em algo como $x^2 \varphi(x)$.
- Para que isso aconteça, é preciso que a derivada primeira da função de onda seja algo como $x\varphi(x)$.
- Uma possível solução, que satisfaz a exigência acima, seria da forma exponencial

$$\frac{1}{2} kx^2 \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = Ae^{-bx^2}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

15/47

Oscilador quântico

- De fato,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{dAe^{-bx^2}}{dx} = -2bxAe^{-bx^2} = -2bx\varphi(x)$$

- e

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \frac{d(-2bxAe^{-bx^2})}{dx} = (-2b + 4b^2 x^2)Ae^{-bx^2}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

16/47

Oscilador quântico

- Note-se que o sinal de menos no expoente é necessário para que esta função se anule no infinito, condição de contorno geral para as soluções da equação de onda.
- Substituindo esta solução na equação anterior, resulta

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-2b + 4b^2 x^2)Ae^{-bx^2} + \frac{1}{2} kx^2 Ae^{-bx^2} = EAe^{-bx^2}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

17/47

Oscilador quântico

- Para que esta equação tenha solução, é preciso que ela seja válida ordem a ordem de x .
- Desta forma, ela se desdobra em duas:

$$\frac{\hbar^2}{2m} 2bAe^{-bx^2} = EAe^{-bx^2}$$

- e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} 4b^2 x^2 Ae^{-bx^2} + \frac{1}{2} kx^2 Ae^{-bx^2} = 0$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

18/47

Oscilador quântico

- Da primeira, resulta uma relação para a energia, em função da constante b

$$E = \frac{\hbar^2}{m} b$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

19/47

Oscilador quântico

- Como a função de onda não pode ser nula em todo o espaço, da segunda equação, resulta que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} 4b^2 + \frac{1}{2} k = 0$$

- ou, resolvendo para b ,

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} 4b^2 &= \frac{k}{2} \\ b^2 &= \frac{mk}{4\hbar^2} \\ b &= \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \end{aligned}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

20/47

Oscilador quântico

- E, lembrando novamente que

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

- resulta

$$b = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

21/47

Oscilador quântico

- Retornando este valor de b à equação anterior, temos

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

- ou, simplificando m ,

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

22/47

Oscilador quântico

- Note-se que o valor mais baixo da energia é **diferente de zero**, ao contrário do caso clássico, e se denomina **energia do estado fundamental** ou **energia do ponto zero**.

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

23/47

Oscilador quântico

- A função de onda, por sua vez, fica

$$\varphi(x) = A e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} x^2}$$

- Na verdade, esta não é a solução mais geral para a equação de Schrödinger para o potencial do oscilador harmônico. Pode-se mostrar que esta solução, multiplicada por um polinômio em x também pode ser solução.

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

24/47

Oscilador quântico

- A solução geral é, então, com $n=1,2,3,etc.,$

$$\varphi_n(x) = A H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}}$$

- Onde $H_n(x)$ são os chamados polinômios de Hermite

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= (2x)^2 - 2 \\ H_3(x) &= (2x)^3 - 6(2x) \\ H_4(x) &= (2x)^4 - 12(2x)^2 + 12 \\ &\dots \end{aligned}$$

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

25/47

Oscilador quântico

- E a energia fica, com $n=1,2,3,etc.,$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

- Note que as energias estão "quantizadas" e somente podem tomar valores discretos, em frações semi-inteiras $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ de $\hbar\omega$.

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

26/47

Exercícios

- 1) Calcule a energia total do oscilador harmônico clássico, sabendo que ela será dada pela soma da energia cinética da massa com a energia elástica armazenada na mola e mostre que corresponde à energia elástica da mola em sua deformação máxima A .
- 2) Esboce um gráfico da função de onda do oscilador harmônico quântico para $n=0,1,2,3$ e localize o ponto no eixo mais provável para se encontrar a partícula.

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

27/47

- Este resultado é característico dos sistemas mecâno-quânticos.
- A razão última é que os níveis de energia estão equiespaçados, ao contrário do modelo de Bohr ou do potencial caixa.

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

28/47

Referências

- PESSOA, Jr., Osvaldo. Interferometria, Interpretação e Intuição: uma Introdução conceitual à Física Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, mar. 1997. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_27.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2008

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

29/47

Referências

- PESSOA, Jr., Osvaldo. Interferometria, Interpretação e Intuição: uma Introdução conceitual à Física Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 1, mar. 1997. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_27.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2008

25-set-2009

© www.fisica-interessante.com

30/47

Referências

- <http://pt.wikipedia.org/wiki/Espectroscopia>
- <http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/discharge/index.html>