7. OSCILADOR HARMÓNICO COMPOSTO

Renato P. dos Santos

0. Introdução.

A aplicação dos métodos matriciais à Física é variada. Podemos citar como exemplos as transformações de Lorenz na Relatividade Restrita, a matriz S na Mecânica Quântica, dentre as mais importantes. Neste capítulo trataremos da aplicação de alguns dos métodos matriciais, já vistos nos volumes I e II, a alguns exemplos no âmbito da Mecânica Clássica.

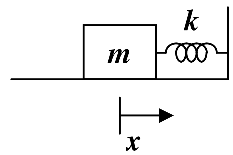
Muitos sistemas físicos de interesse são constituídos por composição de sistemas elementares. Por exemplo, um circuito eléctrico é constituído por um conjunto de componentes eléctricos tais como condensadores, resistências e indutores sendo o comportamento do sistema composto deduzido a partir da composição das propriedades físicas de cada componente, estas supostas já bem conhecidas. Aqui os poderosos métodos do cálculo matricial podem ser de grande auxílio.

Consideraremos aqui, apenas sistemas que podem, sob certas circunstâncias, apresentar um comportamento oscilatório. O paradigma de tais sistemas é o chamado ***oscilador harmónico composto***, cujas propriedades são análogas à do pêndulo composto e de circuitos LC.

O oscilador harmónico composto consiste na associação mecânica de osciladores harmónicos simples e, por essa razão, iniciaremos este texto por um breve estudo desse sistema.

1. O oscilador harmónico simples

Um oscilador harmónico simples é formado por uma massa *m* presa a uma extremidade de uma mola, estando a outra extremidade desta presa a um ponto fixo e estando todo o sistema apoiado numa superfície sem atrito, de forma que a massa possa executar um



movimento rectilíneo horizontal.
A mola, quando deformada, isto é, quando tem seu comprimento natural alterado por compressão ou por alongamento, reage exercendo uma força *F* dada pela lei de Hooke

$$F = -kx,$$

onde *x* é o valor algébrico da variação no comprimento da mola, *k* é uma constante que caracteriza a rigidez da mola e o sinal negativo indica que a força opõe-se sempre ao afastamento do ponto de equilíbrio, isto é, à deformação.
Como se sabe da 2ª Lei de Newton, o resultado da actuação de uma força sobre uma massa constante é uma aceleração *a* dessa massa na direcção da actuação da força dada por

$$F = ma.$$

Igualando-se essas duas equações, e lembrando que a aceleração é a segunda derivada temporal da posição, resulta a seguinte equação diferencial à qual a posição da massa deverá obedecer

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0,$$

onde introduzimos a constante

$$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}.$$

Como se sabe, uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes como a indicada, tem a solução geral

$$x(t) = \alpha\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \beta\cos(\omega_0 t),$$

onde α e β são constantes arbitrárias.
Tomando agora, sem perda de generalidade,

$$\alpha = A\cos\delta \quad \text{e} \quad \beta = A\,\mathrm{sen}\,\delta,$$

onde δ é uma constante real, a solução assume a expressão

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta),$$

função que representa uma oscilação de ***amplitude*** *A* e ***período*** $T = 2\pi/\omega_0$ e com δ passível da interpretação geométrica de um ***ângulo inicial de fase***, isto é, a indicar em que ponto da oscilação se encontra o sistema no início, ou seja em $t = 0$, conforme se vê na Figura 1. Como, na prática, o sistema é posto a oscilar pela deformação máxima da mola e sua posterior libertação, temos que $x(0) \equiv x(t = 0) = A$, isto é, $\delta = \pi/2$, o que nos permite rescrever a solução para este caso finalmente como

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t)\,.$$

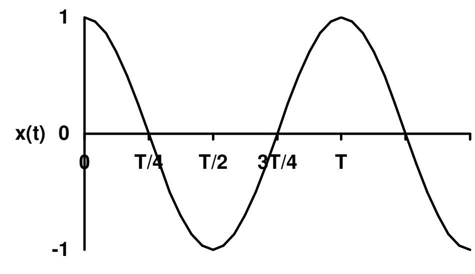


Figura 1 Movimento harmónico simples

Por outro lado, sendo o período *T* de oscilação igual a $2\pi/\omega_0$ significa que a oscilação dá-se com uma frequência $\omega_0/2\pi$ e, por isso, ω_0 é chamada ***frequência angular*** do oscilador.

Note-se que, da definição acima de ω_0, quanto maior a massa *m*, mais lenta será a sua oscilação, e quanto mais rígida a mola, mais rápida será sua oscilação.

2. O pêndulo simples e o circuito LC

Conforme foi dito na introdução, o oscilador harmónico simples é um paradigma para outros sistemas.

O pêndulo simples, por exemplo, consiste numa massa *m* presa a uma extremidade de um fio inextensível de comprimento *l*, cuja outra extremidade está presa a um ponto fixo, estando todo o sistema sob a acção de um campo gravitacional cuja intensidade é dada pela constante *g*, de forma que a massa possa executar uma trajectória que consiste em um arco de circunferência contido no plano vertical.
O sistema está sujeito agora à componente força da gravidade de tal forma que uma parte dela mantém o fio esticado, enquanto outra parte é tangente à trajectória da massa. É esta componente que interessa ao movimento da massa e será tanto maior quanto mais a massa estiver distanciada do seu ponto de equilíbrio que é, evidentemente, o ponto mais baixo da trajectória. Introduzindo como variável o ângulo θ que o fio faz com a vertical, a força será dada por

$$F = -mg\theta .$$

Neste caso, a 2ª Lei de Newton torna-se

$$F = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

e a equação que descreve o movimento será, então,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta = 0 ,$$

com $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.
Por semelhança das equações de movimento, deduz-se que a solução desta é idêntica à do oscilador harmónico simples, ou seja

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) .$$

Neste caso, quanto mais comprido o fio do pêndulo, mais lenta será a sua oscilação, e quanto mais intenso for o campo gravitacional (em Júpiter, p.ex.), mais rápida será a oscilação.
Da mesma forma, num circuito LC formado por um condensador com capacidade *C* e um indutor com indutância *L*, a carga eléctrica *Q* armazenada no condensador é dada pela solução da equação

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{Q}{C}$$

ou

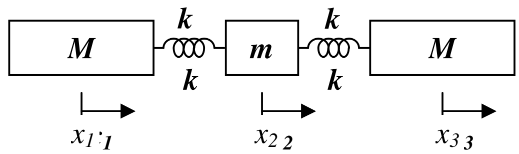
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2\,Q = 0 ,$$

com $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$, o que significa que o valor da carga oscilará como

$$Q(t) = A\cos(\omega_o t) .$$

Neste caso, quanto maior for a capacidade ou a indutância, mais lenta será a oscilação do valor da carga.

Exemplo 1: Consideremos um oscilador composto por duas massas iguais M e uma massa m situada entre as outras duas e ligadas entre si por duas molas ideais com a mesma rigidez dada pela constante k.



Sejam, então, as deslocações de cada massa de suas posições iniciais dadas respectivamente por x_1, x_2 e x_3.

Aplicando a Lei de Hooke para cada mola e a 2ª lei de Newton a cada massa, teremos, após eliminar F, um sistema de três equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) - \dfrac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}.$$

Para o caso presente, procuraremos soluções em que as três massas oscilam com a mesma frequência angular, o que constitui os chamados '***modos normais de oscilação***'.

Substituindo, então, no sistema acima, por analogia com o oscilador simples, $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$, obtém-se, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} -k/M & k/M & 0 \\ k/m & -2k/m & k/m \\ 0 & k/M & -k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\omega_0^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega_0^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega_0^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que as soluções deste sistema com x_1, x_2 e x_3 não simultaneamente nulos, mais não são que os vectores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} -k/M & k/M & 0 \\ k/m & -2k/m & k/m \\ 0 & k/M & -k/M \end{bmatrix}$$

associados ao valor próprio $-\omega_0^2$.

Então, calculando pelo método usual, através da equação característica, obtemos

$$\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{m}\right)\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right) - 2\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{m}\right)\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right) = 0\,,$$

que equivale a

$$\left(\omega_0^2 - \frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{m} - \frac{k}{M}\right)\omega_0^2 = 0\,,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 0 \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{M} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{M} + 2\dfrac{k}{m} \end{cases},$$

valores próprios estes que correspondem a três frequências angulares.
Procurando os vectores próprios associados, temos

a) para $\omega_0^2 = 0$

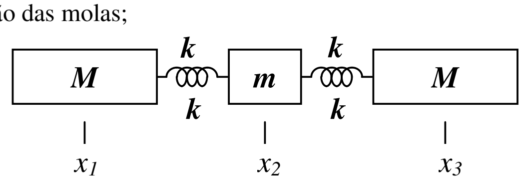
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -k/M & k/M & 0 & 0 \\ k/m & -2k/m & k/m & 0 \\ 0 & k/M & -k/M & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{M}{m}L_1 + L_2 \to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & k/m & 0 \\ 0 & k/M & -k/M & 0 \end{array}\right],$$

$$\xrightarrow[\frac{m}{M}L_{21} + L_3 \to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & k/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

o que equivale a

$$\begin{cases} -\dfrac{k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\dfrac{k}{m}x_2 + \dfrac{k}{m}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases},$$

solução que representa o sistema em repouso, sem oscilação, isto é, sem deformação das molas;



b) para $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M}$

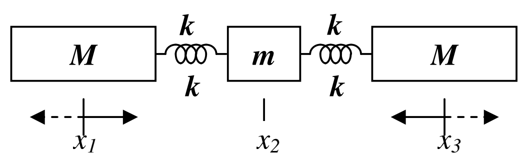
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & k/M & 0 & 0 \\ k/m & k/M - 2k/m & k/m & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} k/m & k/M - 2k/m & k/m & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\xrightarrow[-L_2 + L_3 \to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} k/m & k/M - 2k/m & k/m & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

o que equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{k}{m}x_1 + \left(\dfrac{k}{M} - \dfrac{2k}{m}\right)x_2 + \dfrac{k}{m}x_3 = 0 \\ \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

solução que representa o sistema com as massas M a oscilar com a mesma amplitude e em sentido contrário e a massa m em repouso;



c) para $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M} + 2\dfrac{k}{m}$

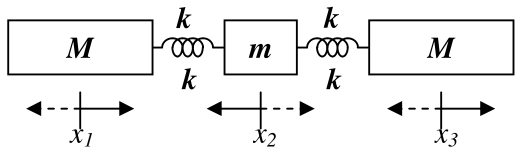
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2k/m & k/M & 0 & 0 \\ k/m & k/M & k/m & 0 \\ 0 & k/M & 2k/m & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 - 2L_2 \to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2k/m & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -k/M & -2k/m & 0 \\ 0 & k/M & 2k/m & 0 \end{array}\right],$$

$$\xrightarrow[L_2 + L_3 \to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2k/m & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -k/M & -2k/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

o que equivale a

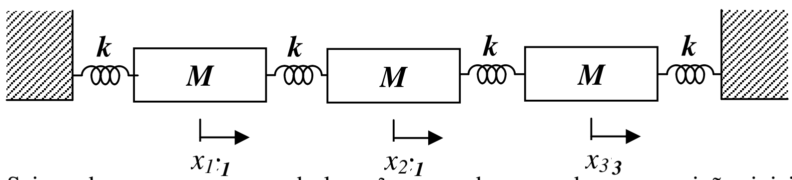
$$\begin{cases} \dfrac{2k}{m}x_1 + \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\dfrac{k}{M}x_2 + \dfrac{2k}{m}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{2M}{m}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases},$$

solução que representa o sistema com as massas M a oscilar com a mesma amplitude e no mesmo sentido e a massa m a oscilar em sentido contrário com uma amplitude $2M/m$ da das outras massas.



Tais são, portanto, os três modos normais de oscilação deste sistema. Note-se que, uma vez que as forças devido às molas são internas ao sistema, o centro de massa não se move. Isso vê-se facilmente no primeiro modo normal, caso trivial, e no segundo, pela simetria da oscilação das massas M e imobilidade da massa central m. No terceiro caso, pode-se verificar que o valor da amplitude da oscilação da massa m é exactamente o que garante a imobilidade do centro de massa.

Exemplo 2: Consideremos agora um oscilador composto da mesma forma por três massas iguais M ligadas entre si por duas molas ideais com a mesma rigidez dada pela constante k e, por sua vez ligadas a duas paredes por molas idênticas.



Sejam, da mesma forma, as deslocações de cada massa das suas posições iniciais dadas respectivamente por x_1, x_2 e x_3.
Aplicando a Lei de Hooke para cada mola e a 2ª lei de Newton a cada massa, teremos, após eliminar F, um sistema de três equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_1 - x_2) - \dfrac{k}{M}x_1 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_2 - x_1) - \dfrac{k}{M}(x_2 - x_3) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_3 - x_2) - \dfrac{k}{M}x_3 \end{cases}.$$

Tal como no exemplo anterior, procuraremos os chamados 'modos normais de oscilação'.

Substituindo-se, então, uma solução do tipo $x_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$, obtém-se, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} -2k/M & k/M & 0 \\ k/M & -2k/M & k/M \\ 0 & k/M & -2k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\omega_0^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - 2k/M & k/M & 0 \\ k/M & \omega_0^2 - 2k/M & k/M \\ 0 & k/M & \omega_0^2 - 2k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Novamente, as soluções deste sistema com x_1, x_2 e x_3 não simultaneamente nulos, mais não são que os vectores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} -2k/M & k/M & 0 \\ k/M & -2k/M & k/M \\ 0 & k/M & -2k/M \end{bmatrix}$$

associados ao valor próprio $-\omega_0^2$.

Da mesma forma, através da equação característica, obtemos

$$\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right) - 2\left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right) = 0,$$

que equivale a

$$\left(\omega_0^2 - 2\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - (2+\sqrt{2})\frac{k}{M}\right)\left(\omega_0^2 - (2-\sqrt{2})\frac{k}{M}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \omega_0^2 = 2\dfrac{k}{M} \\ \omega_0^2 = (2+\sqrt{2})\dfrac{k}{M} \\ \omega_0^2 = (2-\sqrt{2})\dfrac{k}{M} \end{cases},$$

valores próprios estes que correspondem a três frequências angulares.

Procurando os vectores próprios associados, temos

a) para $\omega_0^2 = 2\dfrac{k}{M}$

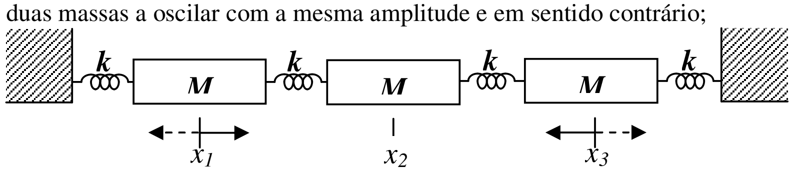
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & k/M & 0 & 0 \\ k/M & 0 & k/M & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} k/M & 0 & k/M & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2 + L_3 \to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} k/M & 0 & k/M & 0 \\ 0 & k/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

o que equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_3 = 0 \\ \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

solução que representa o sistema com a massa central em repouso e as outras duas massas a oscilar com a mesma amplitude e em sentido contrário;



b) para $\omega_0^2 = (2+\sqrt{2})\dfrac{k}{M}$

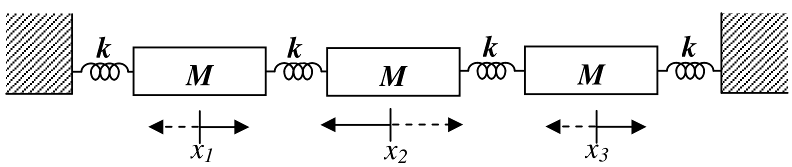
$$\left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ k/M & \sqrt{2}k/M & k/M & 0 \\ 0 & k/M & \sqrt{2}k/M & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{\sqrt{2}}L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}k/2M & k/M & 0 \\ 0 & k/M & \sqrt{2}k/M & 0 \end{array}\right],$$

$$\xrightarrow[-\sqrt{2}L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}k/2M & k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

o que equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \\ \dfrac{k}{\sqrt{2}M}x_2 + \dfrac{k}{M}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}x_1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases},$$

solução que representa o sistema com as massas externas a oscilar com a mesma amplitude e no mesmo sentido e a massa do meio a oscilar em sentido contrário com uma amplitude de $\sqrt{2}$ da das outras massas;



c) para $\omega_0^2 = (2-\sqrt{2})\dfrac{k}{M}$

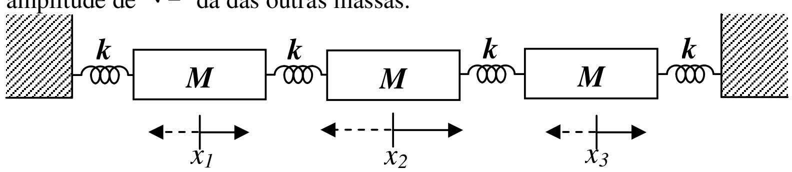
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ k/M & -\sqrt{2}k/M & k/M & 0 \\ 0 & k/M & -\sqrt{2}k/M & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{2}}L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}k/2M & k/M & 0 \\ 0 & k/M & -\sqrt{2}k/M & 0 \end{array}\right],$$

$$\xrightarrow[\sqrt{2}L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}k/M & k/M & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}k/2M & k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

o que equivale a

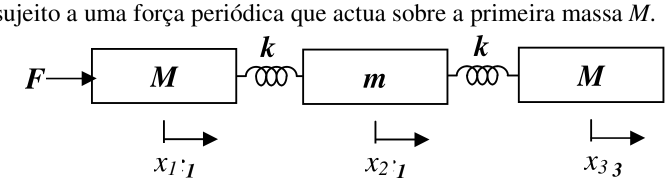
$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}k}{M}x_1 + \dfrac{k}{M}x_2 = 0 \\ -\dfrac{k}{\sqrt{2}M}x_2 + \dfrac{k}{M}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}x_1 \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases},$$

solução que representa o sistema com as três massas a oscilar no mesmo sentido, as massas exteriores com a mesma amplitude e a massa do meio com uma amplitude de $\sqrt{2}$ da das outras massas.



Tais são, portanto, os três modos normais de oscilação deste sistema. Note-se que agora nem todas as forças são internas ao sistema e, por este motivo, o centro de massa pode mover-se. No segundo caso, embora a massa central oscile em sentido contrário às massas externas, o valor da sua amplitude leva à oscilação do centro de massa. No terceiro caso, como as três massas oscilam no mesmo sentido, o centro de massa obviamente move-se.

Exemplo 3: Consideremos agora um oscilador composto do mesmo modo por duas massas iguais *M* e uma massa *m* situada entre as outras duas e ligadas entre si por duas molas ideais com a mesma rigidez dada pela constante *k* e sendo todo o conjunto sujeito a uma força periódica que actua sobre a primeira massa *M*.



Sejam, da mesma forma, as deslocações de cada massa de suas posições iniciais dadas respectivamente por x_1, x_2 e x_3.
Aplicando a Lei de Hooke para cada mola e a 2ª lei de Newton a cada massa, teremos, após eliminar *F*, um sistema de três equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_1 - x_2) + \dfrac{F(t)}{M} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}(x_2 - x_1) - \dfrac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

Considerando-se o caso particular em que a força de excitação é sinusoidal, isto é, da forma $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, com frequência angular ω e amplitude F_0, em analogia com os exemplos anteriores, tentaremos uma solução do tipo $x_i(t) = A_i \cos(\omega t)$, onde agora a solução deve ter uma frequência angular idêntica à da excitação.
Obtém-se, então, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(t)/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - k/M & k/M & 0 \\ k/m & \omega^2 - 2k/m & k/m \\ 0 & k/M & \omega^2 - k/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - k/M\right)A_1 + k/M\, A_2 = -F_0/M \\ k/m\, A_1 + \left(\omega^2 - 2k/m\right)A_2 + k/m\, A_3 = 0 \\ k/M\, A_2 + \left(\omega^2 - k/M\right)A_3 = 0 \end{cases}$$

e que tem por solução

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{\omega^4 - (k/M + 2k/m)\omega^2 + (k/M)(k/m)}{\omega^2(\omega^2 - k/M)(\omega^2 - k/M - 2k/m)} \dfrac{F_0}{M} \\ A_2 = \dfrac{(k/M)(k/m)}{\omega^2(\omega^2 - k/M - 2k/m)} \dfrac{F_0}{k} \\ A_3 = -\dfrac{(k/M)(k/m)}{\omega^2(\omega^2 - k/M)(\omega^2 - k/M - 2k/m)} \dfrac{F_0}{M} \end{cases}$$

Se lembrarmos que no Exemplo 1 as frequências dos modos normais do sistema sem a força de excitação, excluindo o caso trivial $\omega_0^2 = 0$, eram $\omega_0^2 = \dfrac{k}{M}$ e

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{M} + 2\dfrac{k}{m}$, vê-se que se a frequência dessa força tender para alguma dessas frequências, as amplitudes de oscilação crescem de forma ilimitada, com excepção da amplitude A_2 para o segundo modo, o qual correspondia no Exemplo 1 ao estado de repouso da massa m.

Esta situação é conhecida na Física como ***ressonância*** e as frequências de um sistema para os quais a sua amplitude de oscilação crescem indefinidamente são chamadas ***frequências de ressonância*** e tendem a coincidir com as frequências próprias do sistema.

O efeito de ressonância pode ser útil, sendo mesmo o princípio básico do funcionamento de um forno de microondas ou da impulsão de um baloiço, ou prejudicial e perigoso como em estruturas de edifícios e pontes, sendo de triste memória a ponte Tacoma Narrows Bridge em Washington que desabou em Novembro de 1940.

Na prática, a existência de atrito e outras formas de dissipação de energia limitam a amplitude máxima e desviam ligeiramente a frequência de ressonância da frequência própria.

3. Conclusão

Tal foi um exemplo simples da utilização das matrizes à Mecânica Clássica.
Conforme dito na Introdução, a aplicação das matrizes à Física é variada, tendo sido mencionados exemplos na Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica.
Esperamos, todavia, ter demonstrado aqui algo do potencial dos métodos matriciais na Física.

4. Bibliografia

- ARFKEN, George; WEBER, Hans J., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Inc., London.
- GOLDSTEIN, Herbert, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Amsterdam.