Álgebra com computador

Em muitas áreas da actividade humana, fazemos uso de números. Frequentemente, este uso é intenso e, porisso mesmo, o homem vem procurando desenvolver métodos artificiais para auxiliá-lo. Provavelmente, após o uso dos dedos, o primeiro dispositivo artificial de cálculo foi o ábaco. Sucedendo ao ábaco, Charles Babbage criou, no fim do século 19, a Máquina Analítica, que apresentava muito mais recursos. Depois, teve-se a régua de cálculo e hoje estamos acostumados a conviver com computadores gigantescos e calculadoras de pulso.

Todavia, estamos acostumados também a pensar que essas máquinas podem realizar cálculos apenas com números. Parecemos acreditar que o nível de abstracção que a mente humana precisou atingir para conceber o cálculo com quantidades indefinidas - a álgebra - torna-o proibitivo para essas mesmas máquinas. O fato, porém, é que os computadores **podem** trabalhar com símbolos e não há nenhuma novidade nisso. Estamos habituados a cadastros computadorizados de nomes, de títulos de livros, etc.

Aliás, já em 1844, Lady Lovelace, protectora de Charles Babbage, previu a possibilidade de sua máquina manipular símbolos. No entanto, só em 1953 conseguiu-se construir um sistema que realizasse cálculos algébricos simples: diferenciando-se $sen\, x^2$, obteve-se $2x\cos x^2$. Note-se que x é uma quantidade indefinida, sendo o cálculo acima válido para qualquer valor de x.

Embora a computação algébrica tenha dado seus primeiros passos há cerca de 40 anos, só recentemente vem difundindo-se, com aplicações nos mais variados campos de pesquisa em Ciência e Tecnologia. Existem, hoje, mais de 40 sistemas para processar cálculos algébricos, escritos em diferentes linguagens de computador, tendo sido, em sua maioria, criados visando aplicações específicas em problemas de Astronomia, Relatividade Geral e Física das Partículas Elementares. Estes poderosos auxiliares oferecem recursos matemáticos equivalentes a uma verdadeira enciclopédia de técnicas de cálculo na ponta dos dedos, aliados a capacidade de tratar expressões realmente enormes, a uma velocidade muito superior a do ser humano e - principalmente - praticamente sem possibilidade de cometer erros. Fazem o papel, no dizer de Joel Moses, de um “assistente matemático”.

Um exemplo da potência de cálculo desses sistemas, é a repetição em computador dos cálculos efectuados por Charles Delaunay, no fim do século passado, referentes a posição da Lua em sua órbita como função do tempo. À mão, Delaunay levou 10 anos para efectuar esse cálculo e mais 10 verificando-o, tendo publicado os resultados em dois volumes. Hoje, esses cálculos podem sem refeitos em computador *em menos de um minuto*. A propósito, verifica-se, essencialmente, apenas um erro em todos os dois volumes de resultados - um feito realmente notável.

Infelizmente, apesar dos sistemas algébricos terem sido usados em áreas tão distintas do conhecimento humano como Relatividade Geral, Teoria dos Números, Química, Economia e Processamento de Imagens, para citar apenas algumas, somente uma pequena parcela dos usuários potenciais tem desfrutado de seus recursos, desperdiçando tempo e esforço, realizando manualmente cálculos que poderiam ser obtidos rapidamente e com absoluta confiabilidade.

Computação Numérica versus Computação Algébrica

Na introdução, apareceu um exemplo de computação algébrica, uma diferenciação. Vejamos, agora, mais alguns exemplos para que fique clara a diferença com relação à computação numérica:

No exemplo 1, expandimos a expressão $(x-1)^{20}(2x-1)^{20}(3x-1)^{30}$, o que dá origem a um polinómio de alto grau. O procedimento consistiu em abrir os parênteses, efectuando as exponenciações e multiplicações correspondentes, simplificar os termos de potência semelhante e escrever o resultado em ordem decrescente da potência da variável. Tudo isso foi realizado automaticamente pelo programa algébrico, bastando apenas digitar a expressão de entrada e ele respondendo com a expressão simplificada. Na verdade, ele imprime todos os 71 termos do polinómio. Por economia de espaço, deixamos apenas alguns termos típicos. Note-se, também, que os coeficientes são números arbitrariamente grandes.

```
1: (x-1)**20*(2*x-1)**20*(3*x-1)**30;

215892499727278669824*x**70 - ... + 418692282395141768550832249605496*x**40 +...+
+ 534866040*x**5 + 19078420*x**4 - 535080*x**3 + 11065*x**2 - 150*x + 1
```

Expandindo um polinómio de alto grau

No exemplo 2, apresentamos alguns exemplos de diferenciação simbólica. As funções *dilog* e *erf* são as funções matemáticas *dilogaritmo* e *função-erro*.

```
2: DF(COS(X),X);

- SIN(X)

3: DF(ATAN(Y),Y);

1/(Y**2+1)

4: DF(EXPINT(Z),Z);

E**Z/Z

5: DF(DILOG(U),U)

- LOG(X)/(X-1)

6: DF(ERF(X),X);

(2*SQRT(PI))/(E**(X**2)*PI)
```

Exemplo 2 Diferenciação

No exemplo 3, temos a integração simbólica $\int (\log x)^5\, dx$:

```
7: INT(LOG(X)**5,X);

X*(LOG(X)**5 - 5*LOG(X)**4 + 20*LOG(X)**3 - 60*LOG(X)**2 + 120*LOG(X) - 120)
```

Exemplo 3 Integração

No exemplo 4, demonstramos que as linguagens simbólicas podem também, em geral, trabalhar com números. Esses sistemas, via de regra, são mais lentos, para esse tipo de cálculo, que linguagens essencialmente numéricas como FORTRAN ou PASCAL, mas permitem uma precisão muito grande. Como exemplo, temos o número π (pi) com 50 dígitos de precisão (e poderíamos apresentá-lo com precisão ainda maior!). Em seguida, calculamos $\cos \pi/6$, também com precisão de 50 dígitos. Para verificar a exactidão do cálculo, cujo resultado deveria ser $\sqrt{3/2}$, elevamos o resultado obtido ao quadrado. Note que, como o resultado é exacto, temos apenas dois dígitos, embora a precisão admitida continue sendo de até 50 dígitos.

```
8: PRECISION 50; PI;

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

9: COS(PI/6);

0.86602540378443864676372317075293618347140262690519

10: WS**2;

0.75
```

Exemplo 4 Precisão absoluta

No exemplo 5, obtemos um número bastante grande, num exemplo de cálculo com inteiros.

```
11: 2**1000;

1071508607186267320948425049062221810561404811705536074437503883703 51
0511249361224931983788156958581275946729117553146825187145285692314043
5984577574698574803934567748242309854210746050623711418215304647749 83
5819412667398767559116554394607706291457119647768654216766042983165 26
2438688372056680693 76
```

E 5 Cálculo com grandes números

Outro aspecto relevante dos sistemas algébricos baseados em linguagens como LISP e C é a característica da recursão, isto é, um programa ou função referir-se a si mesmo na sua definição. O exemplo clássico de recursão é a definição do factorial de um número n:

$$\boxed{\begin{gathered} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)!, \quad n \succ 0 \end{gathered}}$$

Isso permite, frequentemente, a codificação de programas mais elegantes e, por vezes, só se possui uma definição recursiva para a função desejada.

Sistemas de Computação Algébrica na Escola

Era natural, após a introducção das calculadoras e dos computadores na escola, que testasse-se também a utilização dos sistemas de computação algébrica como recurso pedagógico.

Uma das primeiras experiências consistentes nesse sentido foi realizada na Áustria no ano escolar 1987/1988 com estudantes com idades entre 17 e 18 anos, na forma de um curso electivo de 1,5 horas semanais (Aspetsberger, 1988).

Uma das motivações consistiu na observação de que algo como 80% dos problemas tratados no ensino usual de matemática consiste em trabalho repetitivo e rotineiro; desta forma, a utilização de tais sistemas para a realização desta parte do trabalho perimitiria liberar tempo para tratar de questões mais interessantes e aprofundar o conteúdo matemático no seu aspecto criativo. Este é, aliás, um dos mesmo argumentos que são apresentado para justificar a introdução do próprio computador na escola.

Os resultados sugerem que tais objectivos são viáveis, embora os alunos tenham encontrado dificuldade em dominar o grande número de recursos de um sistema deste tipo num caso real de resolução de problemas. Outro problema apontado foi a dificuldade em chegar-se a um resultado na mesma expressão que a encontrada no livro-texto, por exemplo. Como se sabe, ao contrário de um número, uma mesma expressão algébrica pode ser escrita de várias maneiras diferentes e está longe de ser trivial a manipulação dessas formas de apresentação nos sistemas de computação algébrica actuais.

Embora os resultados, tenham sido estimulantes, estas experiências devem ser naturalmente analisadas, tal como o devem ser quaisquer introduções de novas tecnologias educacionais. Mas não deveria causar estranheza ao professor se no futuro vier a utilizar sistemas deste tipo em suas aulas de Álgebra.

Bibliografia

Aspetsberger, K., *Using a Computer Algebra System in an Austrian High School*, Technical Report RISC-LINZ Series nº 88-5.0, Johannes Kepler University, Linz, Austria.

Pavelle, R., Rothstein, M., Fitch, J., *Computer Algebra*, Scientific American 245(6):102-113, 12/1981.

dos Santos, R.P. e Roque, W.L., *Computação Algébrica : "um assistente matemático"*, Ciência e Cultura 40(9):843-852, 9/1988.

Nome do arquivo:	Álgebra com computador.doc
Pasta:	C:\Documents and Settings\Trader\My Documents\My Work\Meus trabalhos\Revista Cadernos de Educação
Modelo:	C:\Documents and Settings\Trader\Application Data\Microsoft\Modelos\Normal.dot
Título:	Álgebra com computador
Assunto:	
Autor:	Prof. Dr. Renato P. dos Santos
Palavras-chave:	computer algebra, informatics & education, mathematics education
Comentários:	artigo submetido ao nº 4 de Cadernos de Educação
Data de criação:	14/2/1995 8:29
Número de alterações:	6
Última gravação:	4/2/2000 1:56
Gravado por:	Renato P. dos Santos
Tempo total de edição:	14 Minutos
Última impressão:	22/5/2008 6:19
Como a última impressão	
Número de páginas:	5
Número de palavras:	1.433 (aprox.)
Número de caracteres:	7.744 (aprox.)